

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

MC SYLLABUS 1.1

**F. GÖBEL
J. VAN DE LUNE**

LEERGANG BESLISKUNDE

**DEEL 1
WISKUNDIGE BASISKENNIS**

VIERDE DRUK

MATHEMATISCH CENTRUM

AMSTERDAM 1976

AMS(MOS) Subject Classification Scheme (1970): 26-01, 15-01

ISBN 90 6196 0142

eerste druk 1965

derde druk 1971

tweede druk 1969

vierde druk 1976 (ongewijzigd)

Inhoud

	blz.
Voorwoord	1
1. Inleiding; vectorrekening	3
2. Lineaire afhankelijkheid en lineaire onafhankelijkheid	9
3. Het begrip basis	13
4. Een tweetal stellingen	16
5. Matrices	18
6. Produkt van vector en matrix	30
7. De getallenrechte, functies en rijen	33
8. Limieten; reeksen	44
9. Differentiaalrekening	55
10. Maxima en minima van functies van één variabele	68
11. Integraalrekening	73
12. Functies van meer dan één variabele	94
13. Convexe functies	109
Literatuur	120

Voorwoord

In dit eerste deel van de Leergang Besliskunde wordt een aantal wiskundige begrippen en technieken behandeld, die in de statistiek en in de besliskunde geregeld worden gebruikt. Omdat een diepgaande behandeling niet past in het kader van deze leergang, beperken wij ons tot de belangrijkste onderwerpen uit de matrixrekening (§1 t/m § 6) en de analyse (§7 t/m § 13).

De behandeling van vectoren en matrices heeft meer het karakter van een eerste inleiding. Met talrijke voorbeelden, ontleend aan praktische situaties, worden de ingevoerde begrippen verduidelijkt. Een zuiver abstracte presentatie leek de samenstellers minder gewenst dan een opbouw die voorbereidt op de toepassing van vectoren en matrices in de besliskunde en de leer der stochastische processen.

Bij de behandeling van reeksen en van de differentiaal- en integraalrekening zijn de schrijvers ervan uitgegaan dat vele lezers enigermate met deze stof vertrouwd zullen zijn. De presentatie is dan ook zo gekozen, dat men zonder veel moeite aansluiting zal kunnen vinden bij de klassieke behandelingsmethoden. Binnen dit kader is niettemin gestreefd naar grote nauwkeurigheid. De begrippen "getal" en "functie" moesten uiteraard op een klassieke manier worden behandeld. Lezers die geïnteresseerd zijn in een modernere behandeling zouden wij willen wijzen op het leerboek van T.M. APOSTOL, *Mathematical Analysis*, ed. Addison Wesley, 1957.

Het gedeelte over vector- en matrixrekening is geschreven door Drs. F. GÖBEL. De paragrafen over analyse zijn van de hand van J. VAN DE LUNE; het is een bewerking van een dergelijke inleiding door Drs. A.H. HAITSMA. De slotparagraaf over convexe functies is geschreven door Prof. J. KRIENS. Voor enige verbeteringen in de tekst gaat onze dank naar Drs.D. KRUYSWIJK.

Amsterdam, 1965

1. Inleiding; vectorrekening.

Het belangrijkste argument voor het invoeren van vectoren en matrices is wel de verkorte schrijfwijze, die leidt tot een grotere overzichtelijkheid van de formules en de besparing van veel schrijfwerk. Vooral bij de lineaire en kwadratische programmering, maar ook in de waarschijnlijkheidsrekening en bij de dynamische programmering hebben vectoren en matrices bewezen van groot nut te zijn.

We zullen beginnen met de vectorrekening. Onder een n-dimensionale vector A verstaan we een rij van n reële getallen: $A = (a_1, \dots, a_n)$. De getallen $a_1, \dots, a_n$ noemt men de componenten van de vector A .

Zo kunnen de maandomzetten van een bedrijf in een bepaald jaar als een 12-dimensionale vector gezien worden, waarvan de eerste component gelijk is aan de omzet in januari, etc.

Ook de aantallen personeelsleden in de diverse afdelingen van een bedrijf vormen een vector; als er vijf afdelingen zijn, kan de "personeelssituatie" op iedere dag beschreven worden door een 5-dimensionale vector.

Aan vectoren wordt vaak een meetkundige betekenis gehecht en wel op de volgende wijze. Als $A = (a_1, \dots, a_n)$ een n -dimensionale vector is, beschouw dan het punt dat ten opzichte van een n -dimensionaal recht-hoekig assenstelsel de coördinaten $a_1, \dots, a_n$ heeft. Het lijnsegment van de oorsprong naar het punt $(a_1, \dots, a_n)$ is nu een meetkundige voorstelling van de vector A . Het is gebruikelijk om dit lijnsegment als een pijl te tekenen met de pijlpunt in het punt $(a_1, \dots, a_n)$.

De 2-dimensionale vectoren $A = (3, 2)$, $B = (1, 4)$ en $C = (-1, 0)$ hebben dus de in figuur 1.1 aangegeven meetkundige voorstellingen. Hierbij is de eerste component afgezet langs de horizontale of x_1 -as en de tweede component langs de verticale of x_2 -as.

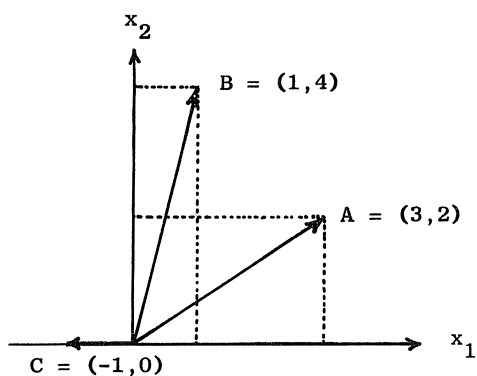


fig. 1.1

Meetkundige voorstelling van drie 2-dimensionale vectoren

De componenten zijn in deze tekening gemakkelijk terug te vinden als de lengten van de projecties op de assen. Wordt bijv. de eerste component van A gevraagd, dan projecteren we het met A corresponderende lijnsegment op de eerste as. De lengte van deze projectie is gelijk aan 3, dus de eerste component van A is eveneens gelijk aan 3. In formule: $a_1 = 3$.

Figuur 1.2 toont de meetkundige voorstelling van de 3-dimensionale vector $V = (4, 5, 2\frac{1}{2})$ met zijn componenten.

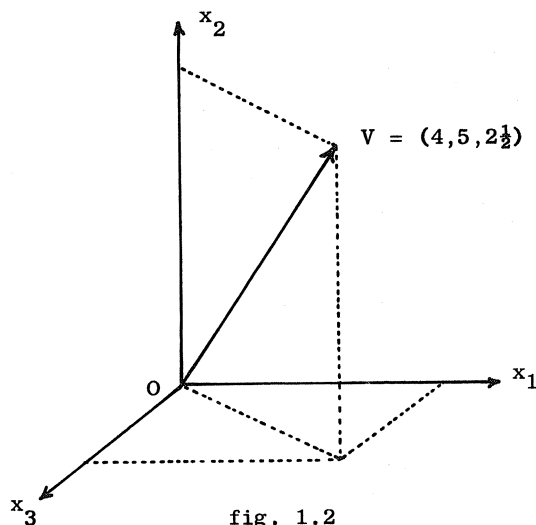


fig. 1.2

Meetkundige voorstelling van een 3-dimensionale vector

Een n -dimensionale vector hadden we gedefinieerd als een rij van n reële getallen. Een 1-dimensionale vector kan men dus op voor de hand liggende wijze identificeren met een reëel getal. Nu kan men met de reële getallen allerlei bewerkingen uitvoeren, zoals optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, etc. en men kan zich afvragen of soortgelijke bewerkingen ook voor vectoren gedefinieerd kunnen worden. In het volgende zal blijken dat dit inderdaad het geval is.

Wij beginnen met de optelling. Aangezien reële getallen kunnen worden opgeteld, kan men definiëren

$$(a_1) + (b_1) = (a_1 + b_1),$$

welke formule dan als volgt gelezen moet worden: de som van twee 1-dimensionale vectoren met componenten a_1 resp. b_1 is weer een 1-dimensionale vector, waarvan de component gelijk is aan $a_1 + b_1$.

We breiden deze definitie nu als volgt uit: onder de som $A+B$ van de n -dimensionale vectoren $A = (a_1, \dots, a_n)$ en $B = (b_1, \dots, b_n)$, verstaan we de n -dimensionale vector $(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$.

Volgens deze definitie is dus de som van de 2-dimensionale vectoren $(5,2)$ en $(3,10)$ gelijk aan $(5+3, 2+10) = (8,12)$. De corresponderende meetkundige voorstelling is in figuur 1.3 getekend.

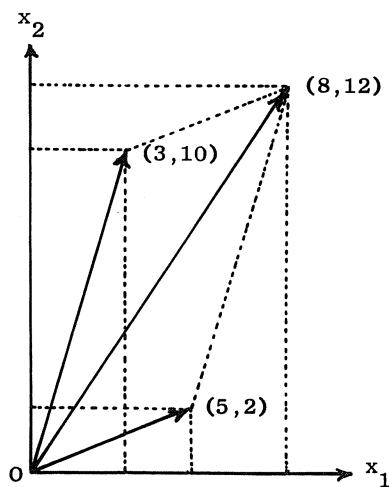


fig. 1.3

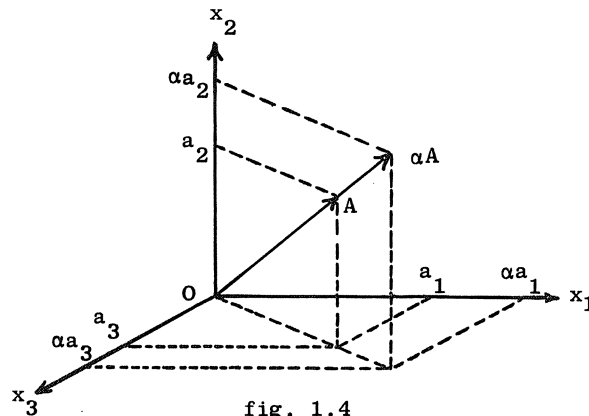
De som van twee 2-dimensionale vectoren

Ter verdere toelichting beschouwen we een bedrijf met twee filialen. Voor ieder der beide filialen kan men, zoals we zoëven hebben gezien, de reeks der maandelijkse omzetten gedurende een bepaald jaar interpreteren als een 12-dimensionale vector. Deze vectoren noemen we $P = (p_1, \dots, p_{12})$ en $Q = (q_1, \dots, q_{12})$. Wat stelt nu $P+Q$ voor? Volgens de zojuist gegeven definitie zijn de componenten van deze vector $p_1+q_1, \dots, p_{12}+q_{12}$. Nu is p_1+q_1 de gezamenlijke januari-omzet van de beide filialen. De vector $P+Q$ geeft dus de maandomzetten in beide bedrijven tezamen aan.

Tenslotte beschouwen we een firma die drie fabrieken beheert, waarvan ieder 5 afdelingen telt. De aantallen personeelsleden worden voor de drie fabrieken gegeven door $P = (p_1, \dots, p_5)$, $Q = (q_1, \dots, q_5)$ en $R = (r_1, \dots, r_5)$. p_2 is dus het aantal personeelsleden op de tweede afdeling van de eerste fabriek, etc. Dan geldt: $S = P+Q+R = (p_1+q_1+r_1, \dots, p_5+q_5+r_5)$, waarin een component van de somvector S nu blijkbaar het aantal arbeiders op een bepaalde afdeling in alle drie fabrieken tezamen voorstelt.

Geheel analoog aan de gang van zaken bij reële getallen wordt het verschil van twee vectoren A en B gedefinieerd als de vector C die, bij B opgeteld, A als som geeft. Dus als $A = (a_1, \dots, a_n)$ en $B = (b_1, \dots, b_n)$, dan is $C = A - B = (a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)$.

Het produkt van een vector $A = (a_1, \dots, a_n)$ en een reëel getal α noteren we als αA ; het is per definitie gelijk aan de vector $(\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$ [zie figuur 1.4].



Het produkt van een 3-dimensionale vector A en een reëel getal α

Is bijv. $A = (a_1, \dots, a_{12})$ weer de vector van de maandomzetten, laten we zeggen in guldens, dan is $\alpha A = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_{12})$ voor geschikte α , de vector der maandomzetten omgerekend in zwitserse francs.

Een som van de vorm $\alpha A + \beta B + \gamma C$ (waarin α , β en γ reële getallen zijn, terwijl A , B en C gelijk-dimensionale vectoren voorstellen), noemt men een lineaire combinatie van de vectoren A , B en C . De lineaire combinatie van drie 2-dimensionale vectoren kan men in een figuur vinden door eerst uit de vectoren A , B en C af te leiden de vectoren αA , βB en γC , vervolgens bijv. eerst de vectoren αA en γC op te tellen en daarna de som te bepalen van de vectoren $\alpha A + \gamma C$ en βB (vgl. figuur 1.5).

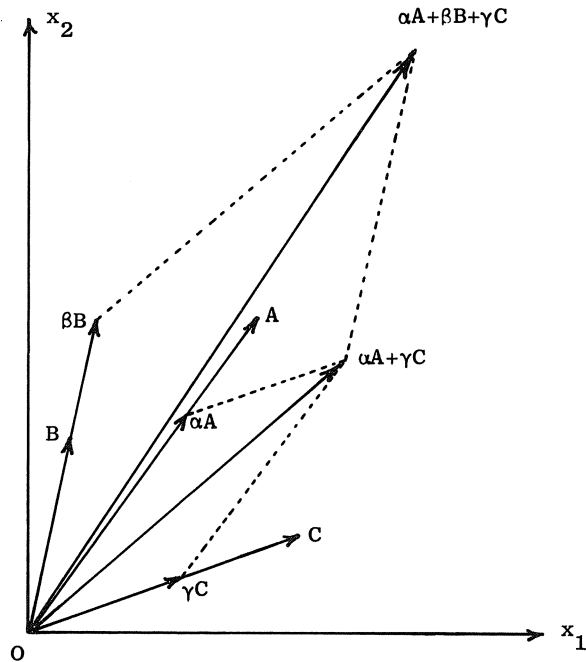


fig. 1.5

Het meetkundig bepalen van de lineaire combinatie
 $\alpha A + \beta B + \gamma C$ van de 2-dimensionale vectoren A , B en C

Een toepassing hiervan is de volgende: laat 1 kg. van een bepaald mengsel van twee grondstoffen zijn samengesteld uit a_1 kg. van grondstof G_1 en a_2 kg. van grondstof G_2 . Met dit mengsel correspondeert dus een vector $A = (a_1, a_2)$. Stel we hebben nog twee van dergelijke mengsels van dezelfde grondstoffen, maar eventueel in een andere verhouding, bijv. $B = (b_1, b_2)$ en $C = (c_1, c_2)$. Vermengen we nu x , y resp. z kg. van de drie mengsels, dan ontstaat een nieuw mengsel waarvan de corresponderende vector, zoals men gemakkelijk inzielt, juist $xA + yB + zC$ is.

Het scalair produkt AB van de vectoren $A = (a_1, \dots, a_n)$ en $B = (b_1, \dots, b_n)$ is per definitie het reële getal $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$.

Als voorbeeld noemen we de prijs van een mengsel van n grondstoffen. Stel dat 1 kg. van het mengsel is samengesteld uit a_1 kg. van grondstof G_1 , a_2 kg. van grondstof G_2 , etc., terwijl de prijs van de grondstoffen resp. $b_1, \dots, b_n$ per kg. bedraagt. De prijs van 1 kg. van het mengsel is dan gelijk aan $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$, het scalair produkt van de vectoren $A = (a_1, \dots, a_n)$ en $B = (b_1, \dots, b_n)$.

De (n -dimensionale) nulvector is de (n -dimensionale) vector waarvan alle componenten nul zijn. De meetkundige voorstelling ervan in de vorm van een lijnsegment met een pijl, valt in het water omdat het lijnsegment niet bepaald is.

De (n -dimensionale) eenheidsvector E_j is de (n -dimensionale) vector waarvan de j^{de} component gelijk is aan 1, terwijl alle overige componenten nul zijn. In de n^{de} dimensie hebben we dus n eenheidsvectoren (vgl. figuur 1.6).

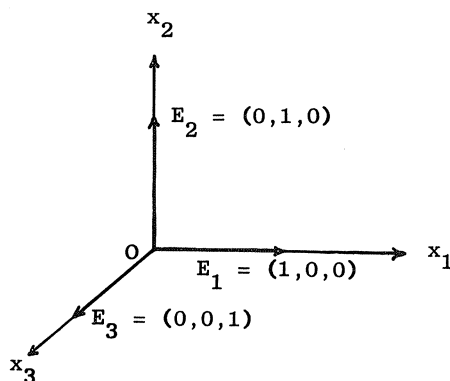


fig. 1.6

De 3-dimensionale eenheidsvectoren

2. Lineaire afhankelijkheid en lineaire onafhankelijkheid.

Voor veel problemen is het nodig te weten of een gegeven vector te schrijven is als lineaire combinatie van een aantal andere, eveneens gegeven vectoren. Het kan bijv. voorkomen dat men uit twee gegeven mengsels A en B van drie grondstoffen een derde mengsel C wil maken door A en B in een geschikte verhouding te mengen. Laten we eens aannemen dat 15 kg. van het mengsel A bestaat uit 5, 4 resp. 6 kg. van ieder der grondstoffen, terwijl 9 kg. van het mengsel B bestaat uit 3, 1 resp. 5 kg. van ieder der grondstoffen. In vectornotatie: $A = (5, 4, 6)$, $B = (3, 1, 5)$. Is het nu mogelijk om hieruit een mengsel $C = (3, 2, 4)$ te maken? Inderdaad is dit mogelijk, want $C = \frac{3}{7}A + \frac{2}{7}B$, zoals men gemakkelijk narekent.

Het is echter onmogelijk om $D = (3, 2, 5)$ te schrijven als lineaire combinatie van A en B, zodat we met stelligheid kunnen zeggen dat niet ieder mengsel van drie grondstoffen kan worden samengesteld uit de mengsels A en B.

Men zou zich kunnen afvragen of de oorzaak misschien in de samenstelling van A en B ligt, m.a.w. zouden de twee gegeven mengsels A en B van zodanige samenstelling kunnen zijn dat wèl ieder ander mengsel *) kan worden verkregen? Zoals later zal blijken is dit niet mogelijk. Indien wij echter drie mengsels tot onze beschikking zouden hebben, is het in sommige gevallen wèl mogelijk om ieder gewenst mengsel te maken. "In sommige gevallen" hebben we gezegd, want wanneer iemand bijv. zou beweren dat hij uit bovenstaande mengsels A, B en C ieder gewenst mengsel kan maken, dan zou hij dit ook moeten kunnen met A en B alleen. Stel nl. dat bijv. het bovengenoemde mengsel D uit A, B en C samengesteld zou kunnen worden en dat gold

$$(2.1) \quad D = xA + yB + zC ,$$

dan geldt tevens

$$(2.2) \quad D = xA + yB + z\left(\frac{3}{7}A + \frac{2}{7}B\right) = \left(x + \frac{3}{7}z\right)A + \left(y + \frac{2}{7}z\right)B .$$

*) In dit voorbeeld beschouwen we steeds mengsels van drie grondstoffen.

Wij hebben echter gezien dat D niet uit A en B kan worden samengesteld en dus kan (2.2) niet correct zijn en derhalve (2.1) evenmin. Wanneer de vectoren drie componenten bezitten, dan kunnen ze dus soms wel worden samengesteld uit drie andere vectoren en in sommige gevallen niet. Om hier orde in te scheppen zullen wij in deze en de volgende paragraaf een aantal definities invoeren en stellingen afleiden.

Definitie 2.1

We zeggen dat een aantal vectoren de ruimte voortbrengt, indien iedere vector te schrijven is als lineaire combinatie van deze vectoren.

Voorbeeld 2.1

Beschouw de 2-dimensionale vectoren (3,1), (2,2) en (5,4). We zullen hier niet bewijzen dat deze vectoren de 2-dimensionale ruimte voortbrengen, maar dit wel plausibel maken door lineaire combinaties op te geven die de vectoren (5,0), (5,3) en (0,-2) als uitkomst geven:

$$\begin{aligned} 2(3,1) - 3(2,2) + 1(5,4) &= (6,2) - (6,6) + (5,4) = \\ &= (6-6+5, 2-6+4) = (5,0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1(3,1) + 1(2,2) + 0(5,4) &= (3,1) + (2,2) + (0,0) = \\ &= (3+2+0, 1+2+0) = (5,3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(3,1) + 2(2,2) - 2(5,4) &= (6,2) + (4,4) + (-10,-8) = \\ &= (6+4-10, 2+4-8) = (0,-2). \end{aligned}$$

In de volgende stelling maken we kennis met een ander stelsel van vectoren dat de ruimte voortbrengt.

Stelling 2.1

De eenheidsvectoren brengen de ruimte voort (zie figuur 2.1).

Bewijs:

Laat $A = (a_1, \dots, a_n)$ een willekeurige vector zijn. We moeten nu trachten een lineaire combinatie van de eenheidsvectoren te vinden die gelijk is aan A. Welnu, $a_1 E_1 + \dots + a_n E_n$ is zo'n lineaire combinatie

want de j^{de} component van deze vector is gelijk aan $a_1 \cdot 0 + \dots + a_j \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 0 = a_j$; dit geldt voor iedere j . Inderdaad geldt dus $A = a_1 E_1 + \dots + a_n E_n$.

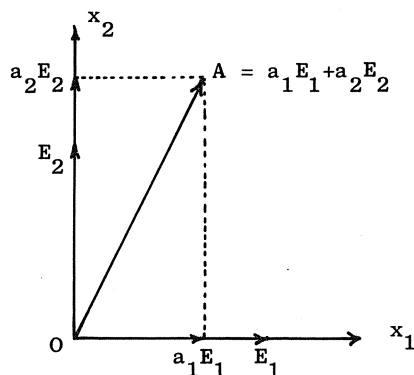


fig. 2.1

De vector A geschreven als lineaire combinatie van E_1 en E_2

Voorbeeld 2.2

Een onmiddellijk gevolg van stelling 2.1 is, dat iedere legering van bijv. 4 metalen gemaakt kan worden, indien men ieder der metalen in zuivere toestand beschikbaar heeft. Een zuiver metaal kan nl. worden opgevat als een legering van 4 metalen waarin 3 componenten ontbreken, zodat de bijbehorende vector de gedaante $(1,0,0,0)$ of $(0,1,0,0)$, etc. heeft. De legering $(3,1,2,5)$ kan dan als volgt uit de zuivere metalen worden verkregen:

$$(3,1,2,5) = 3(1,0,0,0) + (0,1,0,0) + 2(0,0,1,0) + 5(0,0,0,1).$$

Het in het begin van deze paragraaf gegeven voorbeeld leidt tevens tot de volgende begrippen:

Definitie 2.2

k vectoren $A_1, \dots, A_k$ heten lineair afhankelijk, indien er reële getallen $x_1, \dots, x_k$ bestaan, niet alle nul, zodanig dat $x_1 A_1 + \dots + x_k A_k$ de nulvector is.

Definitie 2.3

k vectoren $A_1, \dots, A_k$ heten lineair onafhankelijk indien dergelijke x 'en niet bestaan.

Definitie 2.4

Een vector A heet lineair afhankelijk van $A_1, \dots, A_k$ indien A te schrijven is als lineaire combinatie van $A_1, \dots, A_k$.

In bovengenoemd voorbeeld is dus wegens $C = \frac{3}{7}A + \frac{2}{7}B$ de vector C lineair afhankelijk van A en B . Ook is het stelsel A, B, C lineair afhankelijk, wegens $\frac{3}{7}A + \frac{2}{7}B - C = 0$. Tenslotte is de vector D niet lineair afhankelijk van A en B .

We merken omtrent definitie 2.3 nog het volgende op: als gegeven is dat $A_1, \dots, A_k$ lineair onafhankelijk zijn, en er is ook gegeven dat $x_1 A_1 + \dots + x_k A_k = 0$, dan zijn noodzakelijkerwijs alle x 'en gelijk aan 0.

Stelling 2.2

De eenheidsvectoren zijn lineair onafhankelijk.

Bewijs:

Stel dat de eenheidsvectoren lineair afhankelijk waren, dan zouden er reële getallen $x_1, \dots, x_n$, niet alle 0, bestaan, zodanig dat $x_1 E_1 + \dots + x_n E_n = 0$ (de nulvector). De j^{de} component van de vector $x_1 E_1 + \dots + x_n E_n$ is dus voor iedere j gelijk aan 0. Anderzijds is deze j^{de} component gelijk aan $x_1 \cdot 0 + \dots + x_j \cdot 1 + \dots + x_n \cdot 0 = x_j$. We zien dus dat $x_j = 0$ voor iedere j , hetgeen in tegenspraak is met de veronderstelling. De eenheidsvectoren zijn dus lineair onafhankelijk.

3. Het begrip basis.

Definitie 3.1

Een basis is een stelsel van lineair onafhankelijke vectoren dat de ruimte voortbrengt.

Uit de stellingen 2.1 en 2.2 volgt dus dat de eenheidsvectoren een basis vormen, en de vraag ligt voor de hand of er nog andere bases bestaan. De volgende stelling geeft een gedeeltelijk antwoord op deze vraag.

Stelling 3.1

Ieder stelsel van n lineair onafhankelijke n -dimensionale vectoren is een basis.

Voorbeeld 3.1

Beschouw de 2-dimensionale vectoren $(2,1)$ en $(1,3)$ en stel dat voor zekere x en y zou gelden

$$x(2,1) + y(1,3) = 0 \quad (\text{de nulvector}).$$

Hieruit volgt voor de componenten

$$2x + y = 0$$

$$x + 3y = 0.$$

Indien we x en y uit dit stelsel oplossen, vinden we als enige oplossing $x = 0$, $y = 0$.

De vectoren $(2,1)$ en $(1,3)$ zijn dus lineair onafhankelijk, zodat ze volgens stelling 3.1 een basis vormen. Iedere 2-dimensionale vector kan dus worden geschreven als lineaire combinatie van de vectoren $(2,1)$ en $(1,3)$.

Voorbeeld 3.2

Laten we dit eens toepassen op legeringen. Stel iemand heeft twee legeringen tot zijn beschikking: 3 kg. van de ene bevat 2 kg. koper en 1 kg. nikkel, 4 kg. van de andere bevat 1 kg. koper en 3 kg. nikkel. Hij wil hieruit 24 kg. van de legering maken die 11 kg. koper en

13 kg. nikkel bevat. In vectortaal luidt zijn probleem dus: zoek reële getallen x en y zodanig dat $x(2,1) + y(1,3) = (11,13)$.

Aangezien $(2,1)$ en $(1,3)$ lineair onafhankelijke vectoren zijn, weten we dat zulke reële getallen bestaan. Inderdaad voldoet $x = 4$, $y = 3$ aan bovenstaande vectorvergelijking. Als we dus $4 \times 3 = 12$ kg. van de legering $(2,1)$ met $3 \times 4 = 12$ kg. van de legering $(1,3)$ versmelten, ontstaat 24 kg. van de legering $(11,13)$.

Om stelling 3.1 te kunnen bewijzen hebben we de volgende stelling nodig:

Stelling 3.2 (de "Austauschsatz" van Steinitz)

Als $A_1, \dots, A_k$ de ruimte voortbrengen en $B_1, \dots, B_m$ een stelsel is van lineair onafhankelijke vectoren, dan is $m \leq k$, en is het mogelijk om het stelsel $B_1, \dots, B_m$ met $k-m$ der vectoren $A_1, \dots, A_k$ aan te vullen tot een stelsel dat de ruimte voortbrengt.

Bewijs:

Voor $m = 0$ is de stelling triviaal. We zullen nu, uitgaande van de veronderstelling dat de stelling juist is voor $(m-1)$ vectoren B , bewijzen dat hij ook geldt voor m vectoren B (principe van de volledige inductie).

Laat dus $A_1, \dots, A_k$ een stelsel zijn dat de ruimte voortbrengt en laten de vectoren $B_1, \dots, B_{m-1}$ lineair onafhankelijk zijn. We weten dan dat $m-1 \leq k$, en ook dat het mogelijk is om het stelsel $B_1, \dots, B_{m-1}$ met $k-(m-1)$ der vectoren $A_1, \dots, A_k$ aan te vullen tot een nieuw stelsel dat de ruimte voortbrengt. We kunnen wel aannemen dat deze $k-m+1$ aanvullende vectoren $A_m, \dots, A_k$ zijn.

$B_1, \dots, B_{m-1}, A_m, \dots, A_k$ brengen dus de ruimte voort, d.w.z. iedere vector A is te schrijven als

$$(3.1) \quad A = y_1 B_1 + \dots + y_{m-1} B_{m-1} + y_m A_m + \dots + y_k A_k.$$

In het bijzonder is het mogelijk een dergelijke betrekking te vinden voor de vector B_m :

$$(3.2) \quad B_m = x_1 B_1 + \dots + x_{m-1} B_{m-1} + x_m A_m + \dots + x_k A_k.$$

Hierin zijn niet alle x 'en vanaf x_m gelijk aan 0. Dit zou immers betekenen dat de vectoren $B_1, \dots, B_m$ lineair afhankelijk zijn, wat in strijd is met het gegeven.

We kunnen dus zonder beperking van de algemeenheid aannemen dat $x_m \neq 0$ is. Een eenvoudig gevolg hiervan is dat $m-1 < k$, dus dat $m \leq k$. Verder heeft het niet-nul zijn van x_m tot gevolg dat we A_m uit (3.2) kunnen oplossen:

$$(3.3) \quad A_m = z_1 B_1 + \dots + z_m B_m + z_{m+1} A_{m+1} + \dots + z_k A_k.$$

Als we nu (3.3) substitueren in (3.1), hebben we A uitgedrukt in $B_1, \dots, B_m, A_{m+1}, \dots, A_k$, waarmee stelling 3.2 bewezen is, omdat A een willekeurige vector uit de ruimte was.

Bewijs van stelling 3.1

We moeten aantonen dat ieder stelsel $B_1, \dots, B_n$ van lineair onafhankelijke vectoren een basis is. Aangezien de lineaire onafhankelijkheid al gegeven is, kunnen we volstaan met te bewijzen dat $B_1, \dots, B_n$ de ruimte voortbrengen.

Neem in stelling 3.2 nu $m = k = n$ en $A_i = E_i$ voor $i=1, \dots, n$. Inderdaad geldt dat $B_1, \dots, B_n$ lineair onafhankelijk zijn en dat $E_1, \dots, E_n$ de ruimte voortbrengen (stelling 2.1); dus we kunnen stelling 3.2 toepassen:

$n \leq n$, en het is mogelijk om het stelsel $B_1, \dots, B_n$ met $n - n = 0$ der vectoren E_i aan te vullen tot een stelsel dat de ruimte voortbrengt.

Hiermee is stelling 3.1 bewezen.

We zien dus dat niet alleen het stelsel der (lineair onafhankelijke) eenheidsvectoren, maar zelfs ieder stelsel van n lineair onafhankelijke vectoren een basis is. De volgende stelling leert ons dat hiermede tevens alle bases zijn gegeven.

Stelling 3.3

Als het stelsel $A_1, \dots, A_k$ een basis is, geldt $k = n$.

Bewijs:

Laat $B_1, \dots, B_n$ een stelsel van lineair onafhankelijke vectoren zijn, dus een basis. $A_1, \dots, A_k$ brengen de ruimte voort, dus volgens stelling 3.2 geldt $n \leq k$. Anderzijds brengen $B_1, \dots, B_n$ de ruimte voort, terwijl $A_1, \dots, A_k$ lineair onafhankelijk zijn, dus $n \geq k$, en dus $n = k$.

Samenvatting

Ieder stelsel van n lineair onafhankelijke vectoren is een basis en er zijn geen andere. In het bijzonder vormen de eenheidsvectoren een basis.

4. Een tweetal stellingen.Stelling 4.1

Als $A_1, \dots, A_n$ een basis vormen en A is een willekeurige vector, dan bestaan er eenduidig bepaalde reële getallen $x_1, \dots, x_n$, zodanig dat

$$(4.1) \quad A = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n.$$

Bewijs:

Dat dergelijke x 'en bestaan weten we al; we moeten nog bewijzen dat ze op slechts één manier kunnen worden gekozen.

Stel dus dat A , behalve volgens (4.1), "ontbonden" kan worden op een andere manier:

$$(4.2) \quad A = y_1 A_1 + \dots + y_n A_n.$$

Uit (4.1) en (4.2) volgt dan

$$(x_1 - y_1)A_1 + \dots + (x_n - y_n)A_n = 0 \quad (\text{de nulvector}),$$

en aangezien $A_1, \dots, A_n$ lineair onafhankelijk zijn, volgt hieruit dat $x_1 - y_1 = 0, \dots, x_n - y_n = 0$, waarmee de eenduidigheid bewezen is.

Toepassingen

In voorbeeld 2.2 hebben wij gezien hoe een willekeurige legering kan worden gemaakt indien de metalen die erin voorkomen alle in zuivere toestand beschikbaar zijn.

Stelling 4.1 leert ons nu dat de daar aangegeven methode de enige is.

Iets minder triviaal is de toepassing op het maken van een legering uit andere legeringen. In voorbeeld 3.2 hebben we gezien dat de legering (11,13) kan worden samengesteld uit de legeringen (2,1) en (1,3). Maar neem nu eens aan dat we de legering (1,8) zouden willen maken. De corresponderende vectorvergelijking luidt:

$$x(2,1) + y(1,3) = (1,8).$$

Uit stelling 4.1 volgt dat deze vergelijking precies één oplossing heeft. Zodra we dus, door proberen of hoe dan ook, gevonden hebben dat $x = -1, y = 3$ een oplossing van deze vergelijking is, kunnen we ertoe besluiten dat het niet mogelijk is om de legering (1,8) uit (2,1) en (1,3) te verkrijgen.

Stelling 4.2

(n+1) n-dimensionale vectoren $A_1, \dots, A_{n+1}$ zijn altijd lineair afhankelijk.

Bewijs:

Beschouw de vectoren $A_1, \dots, A_n$. Er zijn nu twee mogelijkheden:

- $A_1, \dots, A_n$ zijn lineair afhankelijk. In dit geval bestaat er een betrekking $x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = 0$, waarin niet alle x 'en gelijk aan nul zijn. Maar dan geldt ook $x_1 A_1 + \dots + x_n A_n + 0 A_{n+1} = 0$. Hierin is weliswaar de coëfficiënt van A_{n+1} gelijk aan 0, maar niet alle coëfficiënten zijn nul, dus $A_1, \dots, A_{n+1}$ zijn lineair afhankelijk.
- $A_1, \dots, A_n$ zijn lineair onafhankelijk. Dan vormen ze een basis, zodat voor zekere y_i geldt $A_{n+1} = y_1 A_1 + \dots + y_n A_n$. Dus ook in dit geval zijn $A_1, \dots, A_{n+1}$ lineair afhankelijk.

Toepassing

In voorbeeld 2.1 hebben we laten zien dat de vectoren $(3,1)$, $(2,2)$ en $(5,4)$ de ruimte voortbrengen. Uit stelling 4.2 blijkt echter dat deze vectoren lineair afhankelijk zijn. Inderdaad geldt

$$\frac{1}{2}(3,1) + \frac{7}{4}(2,2) - (5,4) = 0 .$$

We kunnen de vector $(3,1)$ hieruit oplossen:

$$(4.3) \quad (3,1) = -\frac{7}{2}(2,2) + 2(5,4)$$

en deze betrekking gebruiken om de vectoren $(5,0)$, $(5,3)$ en $(0,-2)$, die we in $(3,1)$, $(2,2)$ en $(5,4)$ hadden uitgedrukt, te schrijven als lineaire combinatie van $(2,2)$ en $(5,4)$ alleen. We vonden bijv.

$$(4.4) \quad (5,0) = 2(3,1) - 3(2,2) + (5,4) .$$

Substitutie van (4.3) in (4.4) geeft

$$(5,0) = 2\left\{-\frac{7}{2}(2,2) + 2(5,4)\right\} - 3(2,2) + (5,4) = -10(2,2) + 5(5,4) .$$

5. Matrices.

Onder een $m \times n$ - matrix verstaan we een rechthoekig schema van reële getallen met m rijen en n kolommen; dus

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) .$$

Als $m = n$, spreken we van een vierkante matrix, of van een $n \times n$ - matrix.

Voorbeeld 5.1

De omzetten (in guldens) van een bepaald bedrijf van verschillende goederen in verschillende jaren kunnen in een matrix worden geplaatst;

iedere rij correspondeert met een bepaald artikel en iedere kolom met een bepaald jaar.

$$\begin{matrix} & 1956 & 1957 & 1958 & 1959 \\ \begin{matrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2350 & 2410 & 2676 & 2390 \\ 5264 & 5800 & 7140 & 7220 \\ 4021 & 3547 & 2827 & 2184 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Voorbeeld 5.2

De transportkosten per ton van een bepaalde grondstof kunnen in een matrix worden geplaatst. M_1 , M_2 , M_3 zijn bijv. mijnen; F_1 , F_2 , F_3 zijn fabrieken.

$$\begin{matrix} & & \text{naar} \\ & & \begin{matrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} M_1 \\ \text{van } M_2 \\ M_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1,02 & 3,54 & 1,76 \\ 2,43 & 4,10 & 2,41 \\ 2,75 & 6,03 & 0,00 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Uit deze matrix blijkt o.a. dat F_2 zeer ongunstig gelegen is, terwijl de grondstoffen uit M_3 ter plaatste kunnen worden verwerkt.

Voorbeeld 5.3

Als twee personen A en B een spel spelen waarbij ieder één zet mag doen, kunnen we de winst van A voor alle mogelijke spelverlopen aangeven door een matrix.

Laten we aannemen dat "een zet doen" voor A betekent, dat hij mag kiezen uit de mogelijkheden a_1 , a_2 , a_3 en a_4 , en voor B dat hij mag kiezen uit de alternatieven b_1 t/m b_5 . Nadat beiden gekozen hebben, krijgt A een bepaald bedrag, afhankelijk van de gedane keuzen. Deze bedragen zouden aangegeven kunnen worden door

$$\begin{matrix} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Bij het spelverloop a_2, b_2 (d.w.z. als A de zet a_2 speelt en B de zet b_2) is de winst van A dus gelijk aan 3. Is het spelverloop a_2, b_3 , dan is de winst voor A gelijk aan -3, d.w.z. hij verliest 3.

Voorbeeld 5.4

In de economie maakt men gebruik van zg. aanvoer-afvoer-matrices (input output tables; transactions matrices). Men gebruikt ze o.a. om inzicht te krijgen in de hoeveelheden goederen die ieder jaar door verschillende bedrijfsklassen aan elkaar geleverd worden.

Nu correspondeert iedere rij en iedere kolom met een bepaalde bedrijfsklasse. Is bijv. het 5^{de} element van de eerste rij 29, dan is de afvoer van bedrijfsklasse 1 naar bedrijfsklasse 5 gelijk aan 29 van de beschouwde eenheden. Voor de periode 1948-1957 publiceerde het Centraal Bureau voor de Statistiek bijv. de volgende matrix (in miljoenen guldens):

		naar						
		1	2	3	4	5	6	7
van	1	797	3312	-	-	29	2	-
	2	1543	9643	228	1543	1171	606	270
	3	13	369	57	24	130	78	-
	4	65	207	18	418	402	39	-
	5	221	1614	28	331	726	168	46
	6	18	276	4	39	1161	172	72
	7	14	376	13	29	74	86	92

Hierbij stellen de nummers van rijen en kolommen de volgende bedrijfsklassen voor: 1. landbouw; 2. industrie (excl. openb. nutsbedrijven); 3. openbare nutsbedrijven; 4. bouwnijverheid; 5. diensten (excl. verkeer); 6. verkeer; 7. diversen.

Een symmetrische matrix is een vierkante matrix met de eigenschap $a_{ij} = a_{ji}$ voor alle i en j .

Voorbeeld 5.5

Een afstandstabel is gewoonlijk een symmetrische matrix:

	A	B	C
A	0	19	27
B	19	0	23
C	27	23	0

De omstandigheid dat op de diagonaal van linksboven naar rechtsonder *) uitsluitend nullen staan, is voor een symmetrische matrix niet karakteristiek; voor een afstandstabel natuurlijk wel.

Het is direct duidelijk dat een dergelijke afstandstabel veel overvloedige informatie bevat: als de afstand van A naar B 19 km. is, is de afstand van B naar A uiteraard ook 19 km. Men maakt daarom tegenwoordig wel afstandstabellen waarin de getallen rechts van de hoofd-diagonaal weggelaten worden, zodat de linker helft beschikbaar komt voor spoorwegkilometers. Een dergelijke matrix is in het algemeen niet meer symmetrisch.

Men zou een symmetrische matrix ook kunnen karakteriseren door de eigenschap dat hij niet verandert als men hem om de hoofddiagonaal omklapt. Bij omklappen komt nl. het element a_{ij} op de plaats van het element a_{ji} en deze elementen zijn in een symmetrische matrix volgens definitie aan elkaar gelijk. Indien we echter een willekeurige matrix A om de hoofddiagonaal omklappen **), ontstaat in het algemeen een andere matrix. Deze noemen we de gespiegelde van A en we gebruiken hiervoor de notatie A' ***). Voor een symmetrische matrix geldt dus

*) Deze diagonaal heet de hoofddiagonaal van de matrix.

**) Strikt genomen kan men een willekeurige matrix niet om zijn hoofddiagonaal omklappen, omdat alleen een vierkante matrix een hoofddiagonaal heeft. De formule $a'_{ij} = a_{ji}$ is echter een voor alle gevallen passende definitie.

***) Men noemt A' ook wel de getransponeerde van A . In plaats van A' vindt men soms de notatie A^T .

$A = A'$; voor een niet-symmetrische matrix is dit niet meer het geval. Wel geldt, als wij de elementen van A weer aangeven met a_{ij} en die van A' met a'_{ij}

$$(5.1) \quad a'_{ij} = a_{ji}.$$

Evenals met getallen en vectoren, kan men ook met matrices allerlei rekenkundige bewerkingen uitvoeren.

De som $A + B$ van twee matrices A en B is alleen gedefinieerd voor het geval waarin beide matrices evenveel rijen en evenveel kolommen hebben en deze is dan gelijk aan de matrix C waarvan de elementen zijn $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Voorbeeld 5.6

Zou men voor een aantal magazijnen van één firma de omzet-matrices (zie voorbeeld 5.1) kennen, dan zijn de elementen van de som-matrix de omzetten per jaar per artikel voor alle magazijnen tezamen. Stel bijv. dat

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} '56 & '57 & '58 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 24 & 24 & 27 \\ 53 & 58 & 71 \end{pmatrix} & \begin{matrix} G_1 \\ G_2 \end{matrix} \end{matrix}$$

de omzet-matrix voor het eerste magazijn is en

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} '56 & '57 & '58 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 12 & 28 \\ 4 & 37 & 68 \end{pmatrix} & \begin{matrix} G_1 \\ G_2 \end{matrix} \end{matrix}$$

die voor het tweede magazijn. Volgens de zojuist gegeven definitie geldt geldt dan

$$C = A + B = \begin{matrix} & \begin{matrix} '56 & '57 & '58 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 24+3 & 24+12 & 27+28 \\ 53+4 & 58+37 & 71+68 \end{pmatrix} & \begin{matrix} G_1 \\ G_2 \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 27 & 36 & 55 \\ 57 & 95 & 139 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 27 & 36 & 55 \\ 57 & 95 & 139 \end{pmatrix} & \begin{matrix} G_1 \\ G_2 \end{matrix} \end{matrix},$$

waarbij C de gezamenlijke omzetmatrix is. Dit betekent o.a. dat in 1956 van het artikel G_2 in beide magazijnen tezamen 57 eenheden werden omgezet.

Voorbeeld 5.7

De som van een aantal aanvoer-afvoer-matrices, die corresponderen met een reeks van opeenvolgende jaren, geeft de aan- en afvoer voor een bepaald tijdvak.

Het verschil $A - B$ van de matrices $A = (a_{ij})$ en $B = (b_{ij})$ is eveneens alleen gedefinieerd als deze matrices evenveel rijen en evenveel kolommen hebben, en is dan gelijk aan de matrix $C = (c_{ij})$, waarin $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Evenals vectoren kunnen ook matrices met een reëel getal worden vermenigvuldigd. Dit doet men door alle elementen van de matrix met dat reële getal te vermenigvuldigen. Noemen we αA even B , dan geldt dus voor de elementen b_{ij} van B :

$$(5.2) \quad b_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

Het produkt AB van de $m \times n$ - matrix A en de $p \times q$ - matrix B is alleen gedefinieerd als $n = p$, en is dan gelijk aan de $m \times q$ - matrix C , waarin

$$(5.3) \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}.$$

Voorbeeld 5.8

Een firma heeft in de jaren 1951-1954 twee typen machines verkocht aan een drietal landen; de machines kunnen slechts in combinatie gebruikt worden. De matrix A geeft de prijzen voor ieder der machines in de verschillende jaren.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2500 & 2600 & 2650 & 2800 \\ 3480 & 3480 & 3300 & 3350 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{type 1} \\ \text{type 2} \end{matrix}.$$

In de beschouwde periode werden aan Peru, India en Polen de volgende aantallen paren machines verkocht:

Peru India Polen

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} '51 \\ '52 \\ '53 \\ '54 \end{matrix}.$$

$\mathcal{A}$ is een 2×4 - matrix, $\mathcal{B}$ is een 4×3 - matrix. Het produkt $\mathcal{AB}$ is dus gedefinieerd: de uitkomst is een 2×3 - matrix, die wij weer met $\mathcal{C}$ aangeven. Volgens (5.3) geldt nu

$$c_{11} = \sum_{j=1}^4 a_{1j} b_{j1} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31} + a_{14} b_{41} =$$

$$= 2500.2 + 2600.4 + 2650.1 + 2800.0 = 5000 + 10400 + 2650 = 18050,$$

$$c_{23} = \sum_{j=1}^4 a_{2j} b_{j3} = a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} + a_{23} b_{33} + a_{24} b_{43} =$$

$$= 3480.0 + 3480.2 + 3300.1 + 3350.1 = 6960 + 3300 + 3350 = 13610.$$

Op deze wijze kan men alle elementen van de matrix $\mathcal{C}$ berekenen. Het resultaat is

Peru India Polen

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 18050 & 24000 & 10650 \\ 24180 & 30440 & 13610 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{type 1} \\ \text{type 2} \end{matrix}.$$

We lezen hieruit bijv. af dat India in de jaren '51-'54 aan machines van het type 1 een bedrag van 24000 heeft besteed.

Een eenheidsmatrix is een vierkante matrix waarvan de elementen op de hoofddiagonaal gelijk zijn aan 1, terwijl alle overige elementen nul zijn. In formules:

$$(5.4) \quad \begin{cases} a_{ij} = 0 & \text{voor } i \neq j \\ a_{ii} = 1 & \text{voor } i=1, \dots, n \end{cases}.$$

Wij zullen een eenheidsmatrix steeds aangeven met de letter $\mathcal{I}$ en de elementen met δ_{ij} .

De eenheidsmatrix speelt in de matrixrekening eenzelfde rol als het getal 1 bij het vermenigvuldigen van reële getallen. Er geldt nl.

de volgende stelling:

Stelling 5.1

Voor het produkt van een willekeurige matrix A en een eenheidsmatrix geldt

$$(5.5) \quad A I = A$$

en

$$(5.6) \quad I A = A.$$

Is A vierkant dan geldt

$$(5.7) \quad I A = A I = A.$$

Bewijs:

Noem de uitkomst van $A I$ even C , met elementen c_{ik} , dan geldt volgens (5.3)

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta_{jk} = \sum_{j \neq k} a_{ij} \delta_{jk} + a_{ik} \delta_{kk} = a_{ik},$$

want $\delta_{jk} = 0$ als $j \neq k$.

Dus $A I = C = A$.

Op dezelfde manier bewijst men $I A = A$.

Indien A niet vierkant is kunnen we deze beide betrekkingen bezwaarlijk samenvatten, want als A een $m \times n$ -matrix is, dan is de eenheidsmatrix in (5.5) een $n \times n$ -matrix en die in (5.6) een $m \times m$ -matrix. Is A echter vierkant, d.w.z. $m = n$, dan zijn deze beide eenheidsmatrices toch dezelfde, zodat dan (5.7) geldt.

Zoals men weet is het produkt van reële getallen commutatief, d.w.z. in een produkt kan men de volgorde van de factoren veranderen, zonder dat de uitkomst verandert: $xy = yx$. Het matrixprodukt is echter niet commutatief, dus niet altijd geldt $AB = BA$. Als A en/of B niet vierkant is, dan kan het zelfs gebeuren dat het produkt AB wel gedefinieerd is, maar het produkt BA niet. Doch ook als A en B beide $m \times m$ -matrices zijn, behoeft AB niet gelijk aan BA te zijn. Vergelijk bijv. de volgende matrices:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

In sommige gevallen mogen de factoren wèl worden verwisseld, zoals blijkt uit formule (5.7).

Voorbeeld 5.9

Bepaal $\mathcal{A}\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}\mathcal{A}$ als $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{A}$ is een 2×2 - matrix, $\mathcal{B}$ een 2×3 - matrix. Het produkt $\mathcal{B}\mathcal{A}$ is dus niet gedefinieerd, terwijl

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al is het matrixprodukt dan niet commutatief, het is wèl associatief; d.w.z. voor ieder drietal matrices $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ waarvoor de produkten $\mathcal{A}\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}\mathcal{C}$ zijn gedefinieerd, geldt

$$(5.8) \quad (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}).$$

Voor de elementen van de matrices betekent dit

$$(5.9) \quad \sum_k \left(\sum_j a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_j a_{ij} \left(\sum_k b_{jk} c_{kl} \right).$$

Het bewijs van deze eigenschap is zeer eenvoudig; we zullen het hier niet geven. Verder vermelden wij dat $\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}$.

Als $\mathcal{A}$ een gegeven vierkante matrix is, kan men in sommige gevallen (d.w.z. voor sommige $\mathcal{A}$) een matrix $\mathcal{B}$ vinden, zodanig dat

$$(5.10) \quad \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{I}.$$

Matrices $\mathcal{A}$ waarbij zo'n $\mathcal{B}$ bestaat noemt men niet-singulier. We zullen er hier niet op ingaan hoe men onderzoekt of $\mathcal{A}$ niet-singulier is, en zo ja, hoe men dan de matrix $\mathcal{B}$ bepaalt. We volstaan hier met een eenvoudig voorbeeld.

Voorbeeld 5.10

Onderzoek of de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ niet-singulier is. Deze opgave is equivalent met de volgende: onderzoek of er reële getallen p , q , r en s bestaan zo, dat voldaan is aan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uitgeschreven is dit

$$\begin{cases} 1.p + 0.r = 1 \\ 1.q + 0.s = 0 \\ -1.p + 2.r = 0 \\ -1.q + 2.s = 1 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} 1.p - 1.q = 1 \\ 0.p + 2.q = 0 \\ 1.r - 1.s = 0 \\ 0.r + 2.s = 1 \end{cases}.$$

Het linker stelsel heeft als oplossing $p=1$, $q=0$, $r=\frac{1}{2}$, $s=\frac{1}{2}$, en deze waarden voldoen ook aan het rechter stelsel. Dus A is niet-singulier, en

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

B heet de inverse van A . Dat het bepalend lidwoord hier terecht is gebruikt, blijkt uit de volgende stelling.

Stelling 5.2

De inverse van een matrix is, indien hij bestaat, eenduidig bepaald.

Bewijs:

Stel dat zowel B als C een inverse is van de gegeven matrix A . Dan zou dus gelden

$$AB = BA = I; \quad AC = CA = I.$$

Hieruit volgt

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C.$$

De inverse van A wordt gewoonlijk genoteerd als A^{-1} . Er geldt dus

$$(5.11) \quad A A^{-1} = A^{-1} A = I .$$

(We hebben hier opnieuw een speciaal geval waarin de vermenigvuldiging commutatief is).

De inverse van de eenheidsmatrix I , is weer I , zoals we direkt kunnen inzien door in (5.7) $A = I$ in te vullen. Er staat dan nl.
 $I I = I I = I$.

Stelling 5.3

Voor ieder tweetal matrices A en B , waarvoor het produkt gedefinieerd is, geldt

$$(5.12) \quad (AB)' = B' A' .$$

Bewijs:

Stel A is een $p \times q$ - matrix. Omdat het produkt AB is gedefinieerd, is B dus een $q \times r$ - matrix. Hieruit volgt dat B' een $r \times q$ - matrix is en A' een $q \times p$ - matrix. Het produkt $B' A'$ is dus gedefinieerd.

Noemen we AB even C , dan geldt

$$(5.13) \quad c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk} .$$

Een element van de gespiegelde matrix C' vinden we door de indices te verwisselen (vgl. (5.1)):

$$c'_{ik} = c_{ki} .$$

Uit (5.13) volgt dus

$$c'_{ik} = \sum_j a_{kj} b_{ji} .$$

In het rechterlid kunnen we nu a_{kj} resp. b_{ji} vervangen door a'_{jk} resp. b'_{ij} :

$$c'_{ik} = \sum_j a'_{jk} b'_{ij} = \sum_j b'_{ij} a'_{jk} .$$

Noemen we $\mathcal{B}'\mathcal{A}'$ even $\mathcal{D}$, dan geldt

$$d_{ik} = \sum_j b'_{ij} a'_{jk},$$

zodat $c'_{ik} = d_{ik}$, ofwel $(\mathcal{A}\mathcal{B})' = \mathcal{B}'\mathcal{A}'$.

Stelling 5.4

Als de vectoren $B_1 = (b_{11}, \dots, b_{1n})$

$$B_2 = (b_{21}, \dots, b_{2n})$$

$\vdots$

$$B_n = (b_{n1}, \dots, b_{nn})$$

een basis vormen,^{*)} dan zijn de matrices

$$\mathcal{B} = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{en } \mathcal{B}' \text{ niet-singulier.}$$

Bewijs:

Iedere vector A is te schrijven als lineaire combinatie van de basisvectoren $B_1, \dots, B_n$; dus voor iedere vector A kunnen we reële getallen $x_1, \dots, x_n$ bepalen, zodanig dat

$$(5.14) \quad A = x_1 B_1 + \dots + x_n B_n.$$

Voor de j^{de} component a_j van A geldt dus

$$(5.15) \quad a_j = x_1 b_{1j} + \dots + x_n b_{nj} \quad (j=1, \dots, n).$$

Neem nu voor A de k^{de} eenheidsvector E_k met componenten e_{kj} (e_{kj} is dus 0 als $k \neq j$, maar gelijk aan 1 als $j=k$). Ook dan kunnen we getallen $x_1, \dots, x_n$ vinden, die echter van k zullen afhangen. We noemen ze daarom $x_{k1}, \dots, x_{kn}$.

In plaats van (5.15) kunnen we nu zeggen

$$(5.16) \quad e_{kj} = \sum_{i=1}^n x_{ki} b_{ij} \quad (j=1, \dots, n; k=1, \dots, n).$$

^{*)} Dan vormen ook $B_1^*, \dots, B_n^*$ een basis, waarbij $B_j^* = (b_{1j}, \dots, b_{nj})$ voor $j = 1, \dots, n$. Wij bewijzen dit niet.

In een enigszins gewijzigde vorm ziet de definitieformule (5.3) van het matrixprodukt er als volgt uit

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^n a_{ki} b_{ij}.$$

De grote overeenkomst van deze formule met (5.16) doet ons inzien dat (5.16) equivalent is met

$$(5.17) \quad \mathcal{Y} = \mathcal{X} \mathcal{B},$$

immers $e_{kj} = \delta_{kj}$ voor alle k en j . Evenzo bewijst men het bestaan van de matrix $\mathcal{Y}$ met $\mathcal{B} \mathcal{Y} = \mathcal{I}$. Uit $\mathcal{X} (\mathcal{B} \mathcal{Y}) = \mathcal{X} \mathcal{I}$ volgt met behulp van (5.7) en (5.8) dat $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$. De matrix $\mathcal{X}$ is dus de inverse van $\mathcal{B}$, dus $\mathcal{B}$ is niet-singulier.

Dat $\mathcal{B}'$ niet-singulier is, zou men op een dergelijke manier kunnen bewijzen. We zullen het hier anders doen.

Volgens stelling 5.3 en het zojuist bewezene geldt

$$(5.18) \quad \begin{cases} \mathcal{B}' \mathcal{X}' = (\mathcal{X} \mathcal{B})' = \mathcal{I}' = \mathcal{I} \\ \mathcal{X}' \mathcal{B}' = (\mathcal{B} \mathcal{X})' = \mathcal{I}' = \mathcal{I}, \end{cases}$$

dus $\mathcal{B}'$ heeft een inverse (nl. $\mathcal{X}'$), zodat $\mathcal{B}'$ niet-singulier is.

6. Produkt van vector en matrix.

Een matrix is een rechthoekig schema van reële getallen, hadden we gedefinieerd. Nemen we nu eens als bijzondere rechthoek een rechthoek van $1 \times n$. We hebben dan in feite niets anders dan een rij van reële getallen, ofwel een vector. Een n -dimensionale vector kan dus worden opgevat als een $1 \times n$ -matrix. Een andere bijzondere rechthoek is een rechthoek van $m \times 1$. Ook dan hebben we weer een rij getallen, dus een vector:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Ter onderscheiding van de beide soorten vectoren spreekt men wel van rijvectoren en kolomvectoren *).

Laat $X = (x_1, \dots, x_n)$ nu een n -dimensionale kolomvector zijn, dus een $n \times 1$ - matrix. Dan is het produkt AX gedefinieerd voor iedere $m \times n$ - matrix A , en de uitkomst is een $m \times 1$ - matrix, ofwel een m -dimensionale vector

$$(6.1) \quad Y = (y_1, \dots, y_m) = AX.$$

Voorbeeld 6.1

Een firma levert aan n groothandelaren die in n verschillende plaatsen in Nederland gevestigd zijn. Deze firma heeft de bedoeling een nieuwe fabriek te bouwen en wil hiervoor uit m plaatsen diegene kiezen, waarvoor de totale vervoerskosten per jaar minimaal zijn.

Laat a_{ij} de vervoerskosten per ton zijn tussen de plaatsen P_i en Q_j , en laat b_j de hoeveelheid zijn die jaarlijks door de groothandelaar uit Q_j wordt gekocht. Zou de firma nu haar nieuwe fabriek in P_i bouwen, dan bedragen de totale vervoerskosten per jaar

$$(6.2) \quad c_i = a_{i1}b_1 + \dots + a_{in}b_n = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_k \quad (i=1, \dots, m).$$

Vatten we de getallen c_i op als de componenten van een kolomvector, dan geldt voor deze vector C

$$(6.3) \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + \dots + a_{1n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + \dots + a_{mn}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

De vector C kan dus worden opgevat als het produkt van de $m \times n$ - matrix $A = (a_{ij})$ en de $n \times 1$ - vector $B = (b_j)$. Als dus c_k het kleinste element van de produktvector C is, dan is P_k de optimale vestigingsplaats.

*) Om technische redenen worden kolomvectoren soms als rijvectoren gedrukt. Sommige auteurs bedoelen met "vector" uitsluitend "kolomvector", en noteren elke rijvector als een gespiegelde X' van een kolomvector X .

Stel bijv. $m = 3$, $n = 4$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$,

dan geldt $C = AB = (97, 134, 124)$, zodat P_1 de voorkeur verdient.

De vector B verandert in veel gevallen van jaar tot jaar, en aangezien de afzet in de toekomst ons het meest interesseert moeten we B schatten.

Een schatting is altijd aan fouten onderhevig: het is heel goed mogelijk dat $B^* = (10, 10, 8, 8)$ een betere schatting is dan $B = (12, 8, 7, 9)$. We moeten nu nagaan of een foutieve schatting van B grote invloed heeft op de waarde van j waarvoor c_j minimaal is. Dit doen we door kleine veranderingen in B aan te brengen. Zo is $AB^* = (102, 126, 122)$, dus ook bij deze schatting van de omzet-vector is P_1 de beste plaats voor de nieuwe fabriek. Op deze wijze te werk gaande, kan men onderzoeken hoe groot de afwijkingen van de gemaakte schattingen moeten zijn, alvorens een andere vestigingsplaats de optimale wordt.

Als A een niet-singuliere vierkante matrix is, bestaat A^{-1} , zodat uit formule (6.1) volgt:

$$(6.4) \quad A^{-1}Y = A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = IX = X.$$

We hebben dus a.h.w. X opgelost uit de vergelijking (6.1).

Voorbeeld 6.2

Zoek een vector X zo, dat $AX = Y$, waarin $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ en $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

De componenten van X noemen we x_1 en x_2 . $AX = Y$ betekent dan, uitgeschreven:

$$(6.5) \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 = 2 \\ 7x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}.$$

We zouden x_1 en x_2 hieruit kunnen oplossen, maar we geven er de voorkeur aan om de vector X te bepalen met behulp van A^{-1} , zoals hierboven voor het algemene geval is gedaan.

A^{-1} blijkt gelijk te zijn aan $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$ *).

We vinden nu zonder moeite

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Het voordeel van deze methode boven het direkt oplossen van het stelsel (6.5) is, dat men, zodra men A^{-1} eenmaal heeft bepaald, bij iedere Y direkt de gezochte X kan vinden met behulp van de formule $X = A^{-1}Y$.

7. De getallenrechte, functies en rijen.

Onder de natuurlijke getallen verstaan wij de getallen 1, 2, 3, etc. De verzameling der gehele getallen omvat de natuurlijke getallen, hun tegengestelden, en het getal 0. De rationale getallen zijn van de vorm $\frac{m}{n}$, 0 of $-\frac{m}{n}$, waarin m en n natuurlijke getallen zijn. Er wordt hier niet op ingegaan hoe men de klasse der reële getallen verkrijgt door aan de klasse der rationale getallen de irrationale (zoals $\sqrt{2}$, π) toe te voegen.

Een verzameling (van dingen, getallen, mensen, etc.) heet af telbaar als er een voorschrift bestaat dat op ondubbelzinnige wijze aan elk element van die verzameling een verschillend natuurlijk getal toevoegt, dat we het rangnummer van dat element kunnen noemen. Men kan voor zichzelf nagaan dat niet alleen de natuurlijke getallen, maar ook de gehele, de even en de rationale getallen aftelbare verzamelingen vormen. De verzameling der reële getallen is echter overaftelbaar, d.w.z. men kan bewijzen dat zo'n nummeringsvoorschrift voor deze verzameling niet bestaat.

Om het tamelijk abstracte begrip "reëel getal" meer aanschouwelijk te maken bedienen we ons van het begrip getallenrechte.

Op een rechte lijn r kiezen we twee punten O en E en plaatsen daarbij de getallen 0 resp. 1 (zie figuur 7.1).

*) Inderdaad geldt $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

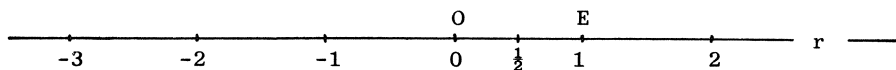


fig. 7.1

De getallenrechte

In figuur 7.1 is aangegeven hoe, uitgaande van de punten O en E, op systematische wijze elk rationaal getal aan een punt van de rechte r kan worden toegevoegd ^{*)}. Ook de irrationale getallen kunnen in principe aan punten van r worden toegevoegd, zoals bij wijze van voorbeeld in figuur 7.2 gedemonstreerd wordt voor $\sqrt{2}$.

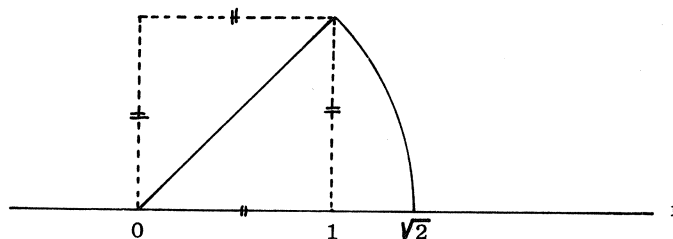


fig. 7.2

Plaatsing van het irrationale getal $\sqrt{2}$ op de getallenrechte

De tot stand gebrachte toevoeging van de reële getallen aan de punten van de rechte r is ondubbelzinnig; d.w.z. verschillende getallen hebben verschillende beeldpunten op r . Verder is de afbeelding ook omkeerbaar; dit laatste houdt in dat elk punt van r het beeldpunt is van precies één reëel getal.

De afstand van een punt van de getallenrechte tot het nulpunt O, noemt men de absolute waarde van het getal, dat bij dat punt behoort. De absolute waarde van een getal a duiden we aan met $|a|$.

^{*)} Wij zullen, zoals gebruikelijk, de positieve getallen steeds rechts van het punt 0 plaatsen.

Met betrekking tot het begrip absolute waarde vermelden we een aantal eenvoudige regels

$$(7.1) \quad \begin{cases} |a| = a & \text{als } a \geq 0 \\ |a| = -a & \text{als } a < 0 \end{cases}$$

$$(7.2) \quad |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

$$(7.3) \quad |a \pm b| \geq \left| |a| - |b| \right|$$

$$(7.4) \quad \begin{cases} |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\ \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0) . \end{cases}$$

Intervallen

Een open interval is de verzameling van alle reële getallen, gelegen tussen twee vaste getallen a en b .

Is $a < b$, dan geven we het bijbehorende open interval aan met

$$(7.5a) \quad a < x < b .$$

Is niets bekend over de orde-relatie tussen a en b , dan schrijven we voor het betreffende open interval

$$(7.5b) \quad (a, b) .$$

Is $a < b$, dan vormen alle reële getallen x die voldoen aan

$$(7.6a) \quad a \leq x \leq b ,$$

een gesloten interval. Zo'n interval wordt ook vaak aangegeven met

$$(7.6b) \quad [a, b] .$$

Hebben we een verzameling reële getallen x , die gekarakteriseerd kan worden door één van de ongelijkheden

$$(7.7) \quad x < a; \quad x \leq a; \quad x > a; \quad x \geq a ,$$

dan spreken we van een onbegrensd interval. Ook de verzameling van alle reële getallen wordt tot de onbegrensde intervallen gerekend.

Een eindig interval correspondeert op de getallenrechte met een

lijnstuk. Al naar gelang de eindpunten van het lijnstuk tot het interval behoren of niet, spreekt men van een gesloten c.q. open interval.

Verder kunnen we nog onderscheiden

links-open intervallen: $a < x \leq b$ of $(a, b]$ en

rechts-open intervallen: $a \leq x < b$ of $[a, b)$.

De onbegrensde intervallen kunnen op soortgelijke wijze worden ingedeeld.

Functies

Bij de opstelling van de definitie van het begrip functie gaan we uit van een van te voren gedefinieerde getallenverzameling D . Voegen we nu aan elk getal uit D een (eventueel ander) getal toe, dan zeggen we dat we een functie geconstrueerd hebben. Deze toevoeging van getallen (= functiewaarden) aan de elementen van D wordt vastgelegd met behulp van een toevoegingsvoorschrift f . Dit toevoegingsvoorschrift moet zodanig gekozen worden, dat aan elk getal $x \in D$ één en slechts één getal als functiewaarde wordt toegevoegd. Voor het, volgens het voorschrift f aan $x \in D$ toegevoegde getal schrijven we $f(x)$.

De verzameling D (= verzameling van x -waarden) wordt soms met D_f (D = domain) en de verzameling van alle functiewaarden $f(x)$ met R_f (R = range) aangegeven.

Voorbeeld 7.1

Wanneer een artikel in elke gewenste hoeveelheid kan worden ingekocht, kunnen we de inkoopprijs opvatten als een functie van de ingekochte hoeveelheid. Bij elke ingekochte hoeveelheid x (≥ 0), zal nl. ondubbelzinnig één bepaalde inkoopprijs $f(x)$ behoren. D_f is in dit geval de verzameling $x \geq 0$.

Als het nuttig is een functie in een meer aanschouwelijke vorm weer te geven, dan kunnen wij gebruik maken van een zg. grafische voorstelling. Hierbij worden de x -waarden uit D aangegeven op de getallenrechte r , terwijl de bijbehorende functiewaarden worden uit-

gezet in een richting die loodrecht op r staat. Positieve functie-waarden zullen we steeds boven de getallenrechte uitzetten.

Voorbeeld 7.2

Beschouw de getallenverzameling $D = \{1, 2, 3, 4\}$ en stel dat aan deze getallen resp. de getallen 7, 4, 3 en 5 toegevoegd zijn. Dus

$$(7.8) \quad f(1) = 7, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 3, \quad f(4) = 5.$$

In dit voorbeeld is de functie rechtstreeks vastgelegd door bij elk getal uit de oorspronkelijke verzameling de functiewaarde te geven. Doorgaans wordt een functie niet op deze rechtstreekse wijze vastgelegd, maar wordt de functie bepaald door een rekenvoorschrift.

Voorbeeld 7.3

$$(7.9) \quad \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} & \text{voor } x \leq 0 \\ f(x) = x + \frac{1}{2} & \text{voor } 0 < x < 1 \\ f(x) = \frac{5}{2} - x & \text{voor } x \geq 1 \end{cases}$$

Door dit rekenvoorschrift is aan elke x ondubbelzinnig een functiewaarde $f(x)$ toegevoegd. Grafisch kan deze functie als volgt worden voorgesteld:

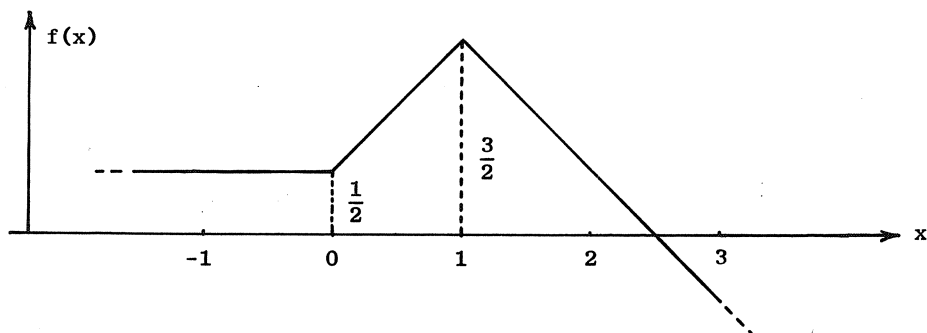


fig. 7.3

Grafische voorstelling van de functie (7.9)

Opmerking

Het is, zoals uit voorbeeld 7.3 blijkt, niet noodzakelijk dat aan verschillende waarden van x verschillende functiewaarden worden toegevoegd. Hier is bijv. aan elke $x \leq 0$ het getal $\frac{1}{2}$ als functiewaarde toegevoegd.

De kromme die in figuur (7.3) is getekend, is een samenhangende kromme. Anders gezegd: een kleine verandering in de waarde van x leidt tot een kleine verandering in de waarde van $f(x)$.

Een functie met deze eigenschap noemt men een continue functie. We zullen dit begrip nog in meer wiskundige termen bespreken.

Een functie die aan alle waarden van de variabele x hetzelfde getal c als functiewaarde toevoegt, wordt een constante functie genoemd. Bekijk we bijv. de functie (7.9) alleen op het interval $x \leq 0$, dan zien we dat $f(x)$ op dit interval overal gelijk is aan $\frac{1}{2}$. De grafische voorstelling van de functie is op dit interval een horizontale rechte lijn.

Een functie waarbij een toename van de variabele x steeds gepaard gaat met een toename van $f(x)$, wordt een monotoon stijgende functie genoemd. Gaat een toename van x steeds gepaard met een afname van $f(x)$, dan spreekt men van een monotoon dalende functie. Grafisch worden deze functies voorgesteld door krommen welke resp. stijgen of dalen wanneer de x -as van links naar rechts doorlopen wordt. Op het interval $0 < x < 1$ is de functie (7.9) monotoon stijgend, op $x \geq 1$ is deze functie monotoon dalend.

Inverse functies (omkeerfuncties)

Wij beschouwen nu het geval dat op de verzameling D een functie f zodanig gedefinieerd is, dat uit $x_1 \neq x_2$ volgt $f(x_1) \neq f(x_2)$; d.w.z. aan verschillende waarden van x zijn verschillende getallen als functiewaarde toegevoegd. In zo'n geval is elk getal t uit R_f de functiewaarde van één en slechts één getal x uit D .

Dit feit brengt de mogelijkheid met zich mee op R_f een functie ϕ te definiëren die aan elk getal t uit R_f dát getal x uit D als functie-

waarde toevoegt, waarvoor geldt: $f(x) = t$.

De functie ϕ heeft dus R_f tot domain en D_f tot range, terwijl verder geldt dat $\phi(t)$ gelijk is aan de ondubbelzinnig bepaalde oplossing van de vergelijking $t = f(x)$, waarin x als onbekende optreedt. Dus: is t een getal uit $D_\phi (= R_f)$, dan is $\phi(t)$ een getal uit $R_\phi (= D_f)$ en volgens de definitie van ϕ geldt dat $f(\phi(t))$ gelijk is aan t . Is x een getal uit D_f , dan is $f(x)$ een getal uit R_f , d.w.z. $f(x)$ is een getal uit D_ϕ . Volgens de definitie van ϕ moet nu gelden: $\phi(f(x)) = x$.

De functie ϕ noemen wij de inverse functie (of omkeersfunctie) van f . Het behoeft geen nader betoog dat f dan de inverse functie van ϕ is.

De inverse functie ϕ van de functie f , gedefinieerd in voorbeeld 7.2, is bepaald door

$$(7.10) \quad D_\phi = \{3, 4, 5, 7\}$$

en het voorschrift

$$(7.11) \quad \phi(3) = 3, \quad \phi(4) = 2, \quad \phi(5) = 4 \quad \text{en} \quad \phi(7) = 1.$$

Het zal duidelijk zijn dat de functie (7.9) geen inverse functie heeft.

Wanneer een functie f een inverse functie ϕ heeft, noemen we f omkeerbaar.

Zonder bewijs vermelden we nog de volgende belangrijke stelling.

Stelling 7.1

Als $f(x)$ op zeker interval D continu en monotoon is, dan is $f(x)$ omkeerbaar op dat interval. De omkeersfunctie $\phi(t)$ is dan ook continu en bovendien monotoon in dezelfde zin als $f(x)$.

Voorbeeld 7.4

$$f(x) = x^2 \quad \text{op} \quad x \geq 0.$$

Deze functie is op $x \geq 0$ continu en monotoon stijgend. De omkeersfunctie van f is $\phi(t) = \sqrt{t}$ op $t \geq 0$. $\phi(t)$ is ook continu en monotoon stijgend.

Samengestelde functies

De functie g zij gedefinieerd op het interval $\alpha \leq t \leq \beta$, terwijl voor elke functiewaarde $g(t)$ geldt $a \leq g(t) \leq b$ (zie figuur 7.4). Op het interval $a \leq x \leq b$ zij vervolgens de functie f gedefinieerd (zie figuur 7.5).

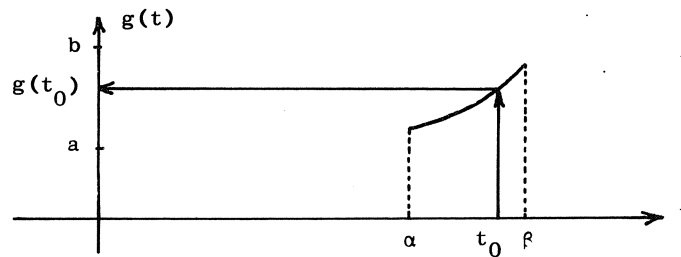


fig. 7.4

Grafische voorstelling van de functie g op $[\alpha, \beta]$

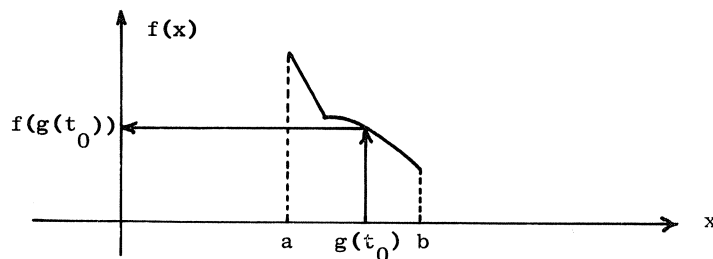


fig. 7.5

Grafische voorstelling van de functie f op $[a, b]$

Nemen we nu een getal t_0 uit het interval $[\alpha, \beta]$ dan behoort daarbij volgens het functievoorschrift g een zekere functiewaarde $g(t_0)$. Dit getal ligt in het interval $[a, b]$ en dus behoort bij dit punt (= getal) volgens het voorschrift f de functiewaarde $f(g(t_0))$. Voeren wij deze procedure uit voor alle punten t van het interval $[\alpha, \beta]$, dan verkrijgen wij een nieuwe functie op het interval $[\alpha, \beta]$. Voor deze nieuwe functie schrijven we $f(g)$. Dit is een zg. samengestelde functie (of een functie van een functie).

Voorbeeld 7.5

$$\begin{aligned} g(t) &= 1-t^2 && \text{op het interval } -1 \leq t \leq +1 \\ f(x) &= \sqrt{x} && \text{op } x \geq 0. \end{aligned}$$

De samengestelde functie $f(g)$ komt er nu als volgt uit te zien:

$$f(g(t)) = \sqrt{1-t^2} \quad \text{op het interval } -1 \leq t \leq +1.$$

Rijen

Onder een rij verstaan we een functie die gedefinieerd is op de verzameling van alle natuurlijke getallen.

Voorbeeld 7.6

De som van de eerste n natuurlijke getallen kunnen wij opvatten als een functie van n . Het functievoorschrift luidt

$$(7.12) \quad f(n) = 1+2+\dots+n = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1), \quad n=1,2,3,\dots$$

Voorbeeld 7.7

Het produkt van de eerste n natuurlijke getallen

$$(7.13) \quad f(n) = 1.2.\dots.(n-1).n = \prod_{k=1}^n k = n!, \quad n=1,2,3,\dots$$

Voor $n!$ leze men " n fakulteit". We definiëren $0! = 1$.

We hebben zojuist een rij gedefinieerd als een functie die gedefinieerd is op de verzameling van alle natuurlijke getallen. Op grond van deze definitie en de geordendheid van de verzameling der natuurlijke getallen, kunnen we een rij ook opvatten als een verzameling van aftelbaar oneindig veel getallen (functiewaarden $f(n)$), welke door één of ander voorschrift zijn vastgelegd en geordend. De getallen (elementen) van deze geordende verzameling noemen wij dan de termen van de rij en de n^{de} term wordt doorgaans aangeduid met a_n in plaats van met $f(n)$. Het een en ander komt er dus hier op neer, dat we in gedachten de getallen a_n achter elkaar opschrijven naar opklimmende grootte van n . Dus: $a_1, a_2, a_3, \dots$

Dubbelrijen

Onder een dubbelrij verstaan we een functie die gedefinieerd is op de roosterpunten (m,n) van het eerste kwadrant van een x,y -vlak.

Voorbeeld 7.8 Binomiaal-coëfficiënten.

De binomiaal-coëfficiënten $\binom{n}{m}$ worden als volgt gedefinieerd:

$$(7.14) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} & \text{als } m \leq n \\ \binom{n}{m} = 0 & \text{als } m > n \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (n \text{ en } m \text{ geheel} \\ \text{en niet-negatief}). \end{array}$$

De binomiaal-coëfficiënten ontstaan wanneer wij $(a+b)^n$ in termen van a en b uitschrijven

$$(7.15) \quad (a+b)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{n-m} b^m.$$

Deze betrekking heet het binomium van Newton.

Enkele eenvoudige eigenschappen van binomiaal-coëfficiënten zijn

$$(7.16) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \binom{n}{m} = \frac{n}{m} \binom{n-1}{m-1} & \text{als } m > 0 ; \\ \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} & \text{als } 0 \leq m \leq n ; \\ \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 ; \\ \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m} . \end{array} \right.$$

Vaak wordt de binomiaal-coëfficiënt $\binom{n}{m}$ ook voor negatieve gehele waarden van m beschouwd; men definieert hem voor die waarden als 0. Merk op, dat de tweede en vierde eigenschap van (7.16) nu geldig zijn voor alle gehele waarden van m .

Dubbelsommen

Men kan een dubbelrij $f(m,n)$ over beide indices sommeren door bijv. eerst bij vaste n de index m van 0 t/m n te laten lopen en vervolgens n van 1 t/m 6. Wij noteren het resultaat als

$$(7.17) \quad s = \sum_{n=0}^6 \sum_{m=0}^n f(m,n) .$$

Merk op dat de binnenste sommatie het eerst moet worden uitgevoerd. Voor het berekenen van zo'n dubbelsom is het wel eens aantrekkelijk de sommatie-volgorde te verwisselen. Bij sommen met eindig veel termen is dit steeds geoorloofd. In bovenstaand voorbeeld kan men de puntenparen (m,n) waarvan de functiewaarden moeten worden opgeteld, aangeven met kruisjes in roosterpunten (d.w.z. punten met gehele coördinaten) in het platte vlak.

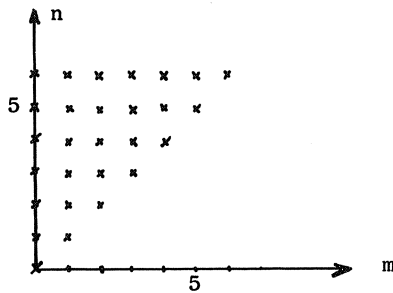


fig. 7.6

Het sommatiegebied van de dubbelsom (7.17)

Volgens voorschrift (7.17) doorloopt bij elk vast getal n , gekozen uit 1 t/m 6, de index m de waarden 0 t/m n . Men kiest dus een horizontale lijn, sommeert daarover, en sommeert tenslotte de resultaten over n . Na verwisseling van de sommatie kiest men eerst m , dus een vertikale lijn. In de figuur ziet men dat de waarden 0 t/m 6 in aanmerking komen. Bij vaste m doorloopt n nu de waarden van m t/m 6. Dus geldt

$$(7.18) \quad s = \sum_{m=0}^6 \sum_{n=m}^6 f(m,n) .$$

8. Limieten; reeksen.

Limiet van een rij getallen.

Wij beschouwen de rij $a_n = \frac{1}{n}$. Geen enkel getal van deze rij is gelijk aan nul, maar hoe groter n wordt gekozen, des te dichter ligt a_n bij nul. Kiezen we nu een willekeurig klein interval $(0, \epsilon)$, dan is er altijd een getal N te vinden, zodanig, dat alle a_n waarvoor geldt $n \geq N$, binnen dit interval liggen. Kiest men nl. $N > \frac{1}{\epsilon}$, dan zal voor alle a_n met $n \geq N$, $a_n < \epsilon$ zijn. We zeggen nu dat de rij a_n naar nul convergeert, of dat de limiet van de rij a_n voor n gaande naar oneindig de waarde 0 heeft. Schrijfwijze:

$$(8.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Definitie 8.1

De oneindige rij $a_1, a_2, \dots$ is convergent, als er een reëel getal a bestaat met de eigenschap dat bij elk positief getal ϵ een getal N gevonden kan worden, zodanig dat voor alle $n \geq N$ geldt

$$(8.2) \quad |a_n - a| < \epsilon.$$

a heet de limiet (voor n naar oneindig) van de rij a_n . Schrijfwijze:

$$(8.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Het getal N in de voorgaande definitie, zal in het algemeen afhankelijk zijn van de keuze van ϵ en wordt daarom ook vaak aangegeven met $N(\epsilon)$.

Definitie 8.2

Een oneindige rij $a_1, a_2, \dots$ die niet convergent is, is divergent.

Zonder bewijs vermelden wij een aantal stellingen betreffende het limietbegrip.

L0: Een rij heeft hoogstens één limiet.

Is a_n een rij met de limiet a , en b_n een rij met de limiet b , dan heeft de rij

L1: $c_n = a_n + b_n$ de limiet $c = a+b$,

L2: $d_n = a_n - b_n$ de limiet $d = a-b$,

L3: $e_n = a_n \cdot b_n$ de limiet $e = a \cdot b$,

L4: $f_n = \frac{a_n}{b_n}$ ($b_n \neq 0$) de limiet $f = \frac{a}{b}$ mits $b \neq 0$.

L5: Elke monotoon niet-dalende rij, die begrensd is, heeft een reëel getal tot limiet; evenzo elke monotoon niet-stijgende rij, die begrensd is.

L6: Convergeren de rijen a_n en b_n naar de limiet a resp. b en geldt $a_n \leq b_n$ voor alle $n > N$, dan is $a \leq b$.

Stelling L5 geldt niet als we ons beperken tot het systeem der rationale getallen. De monotoon stijgende rij $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, die uit louter rationale getallen bestaat, heeft in het systeem der rationale getallen geen limiet. In het systeem der reële getallen heeft e_n de irrationale limiet e .

Het getal e

We beschouwen de rij

$$(8.4) \quad e_n = (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Ontwikkeling van $(1 + \frac{1}{n})^n$ in termen van 1 en $\frac{1}{n}$ volgens het binomium van Newton levert

$$\begin{aligned} (1 + \frac{1}{n})^n &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} 1^{n-m} \left(\frac{1}{n}\right)^m = \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{\binom{n}{m}}{n^m} = \frac{\binom{n}{0}}{n^0} + \frac{\binom{n}{1}}{n^1} + \dots + \frac{\binom{n}{n}}{n^n} = \\ (8.5) \quad &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{n-1}{n}). \end{aligned}$$

Hieruit is gemakkelijk af te leiden

$$\begin{aligned}
 e_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \\
 &\leq 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \\
 (8.6) \quad &= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \\
 &= 3 - \frac{1}{n} < 3.
 \end{aligned}$$

De rij e_n is dus begrensd, want er geldt

$$(8.7) \quad 0 < e_n < 3.$$

Verder tonen we aan dat de rij e_n monotoon stijgend is. Door volledige inductie naar n is gemakkelijk te bewijzen dat

$$(8.8) \quad (1+h)^n > 1+n \cdot h \quad \text{als } h > -1, h \neq 0 \text{ en } n=2,3,4,\dots$$

Voor het quotiënt van twee opeenvolgende termen in de rij e_n geldt nu ($n \geq 2$)

$$(8.9) \quad \frac{e_n}{e_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} > \left(1 - n \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = 1.$$

Hieruit volgt dat de rij e_n monotoon stijgend is; d.w.z.

$$(8.10) \quad e_{n-1} < e_n.$$

Op grond van eigenschap L5 kunnen we nu dus zeggen dat de rij e_n convergeert. De bijbehorende limiet geven we aan met de letter e .

Dus

$$(8.11) \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Een benadering van e is: 2,7182818284590...

Limieten van functies met een "continue variabele"

Tot nu toe hebben we alleen limieten beschouwd van rijen, dus van functies waarbij de variabele alleen gehele waarden aanneemt. We zullen nu limieten beschouwen van functies $f(x)$, waarbij x een "continue variabele" is. We zeggen dat $f(x)$ naar een limiet l convergeert, voor x naderend tot a , wanneer alle waarden van de functie $f(x)$ voor x voldoende dicht bij a , willekeurig weinig van l verschillen. Nauwkeuriger wordt dit uitgedrukt in de volgende definitie:

Definitie 8.3

De functie $f(x)$ convergeert, voor x naderend tot a , naar l , wanneer bij iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ gevonden kan worden, zodanig dat voor iedere $x \neq a$ in het interval $|x-a| < \delta$ geldt: $|f(x) - l| < \epsilon$. We schrijven dan

$$(8.12) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l .$$

Definitie 8.4

Een functie $f(x)$ is in het punt $x = a$ continu, wanneer

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) .$$

De functie $f(x)$ is in het punt $x = a$ dan en slechts dan continu als voldaan is aan de volgende drie voorwaarden:

- 1) $f(x)$ is gedefinieerd op $a - \alpha < x < a + \alpha$ ($\alpha > 0$),
- 2) de limiet $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bestaat,
- 3) deze limiet is gelijk aan $f(a)$.

Definitie 8.5

De functie $f(x)$ is in het punt $x = a$ links-continu (rechts-continu) als bij elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden is, zodanig dat $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, voor alle waarden van x die voldoen aan $a - \delta < x < a$ ($a < x < a + \delta$).

Definitie 8.6

De functie $f(x)$ heet op het interval $a < x < b$ continu, als $f(x)$ continu is in elk punt van dit interval. Is $f(x)$ bovendien rechts-continu in a en links-continu in b , dan zeggen we dat $f(x)$ continu is op het interval $a \leq x \leq b$.

Zonder bewijs vermelden we:

Stelling 8.1

Als $f(x)$ en $g(x)$ continu zijn in het punt $x = a$, dan is dat ook het geval met de functies

$$\begin{aligned} &f(x) + g(x), \\ &f(x) - g(x), \\ &f(x) \cdot g(x) \text{ en} \\ &\frac{f(x)}{g(x)} \text{ mits } g(a) \neq 0. \end{aligned}$$

Stelling 8.2

De functie $f(x) = x$ (voor alle waarden van x) is overal continu.

Bewijs:

Beschouw de gegeven functie in het punt $x = x_0$. Kies een $\varepsilon > 0$ en stel $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Voldoet x nu aan

$$|x - x_0| < \delta,$$

dan geldt

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Hiermede is het bewijs voltooid.

Gevolg

Met $f(x) = x$ zijn ook de functies

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

overal continu (a_i constant).

Verder zijn de functies

$$\frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m}$$

ook continu, behalve in de punten waar de noemer gelijk aan nul is. Hierbij is gebruik gemaakt van de stelling dat een constante functie continu is. Het bewijs van deze stelling is zeer eenvoudig en wordt aan de lezer overgelaten.

Voorbeeld 8.1

Gevraagd $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ te bepalen.

Oplossing:

Voor $x \neq 1$ kunnen we schrijven

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1.$$

Het linkerlid is voor $x = 1$ niet gedefinieerd, het rechterlid wel. Het rechterlid is zelfs een overall continue functie van x .

Stellen we

$$g(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1,$$

dan geldt dus

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = n.$$

De waarde n noemen we de continu makende waarde van de op $x \neq 1$ gedefinieerde functie

$$f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad (x \neq 1)$$

in het punt $x = 1$.

Stelling 8.3

Is $g(t)$ continu in $t = t_0$ en $f(x)$ continu in $x = g(t_0)$, dan is $f(g(t))$ continu in $t = t_0$; m.a.w. een continue functie van een continue functie is continu.

Het bewijs van deze stelling laten we aan de lezer over.

Reeksen

Als uitgangspunt voor een beknopte inleiding in de theorie der reeksen nemen we een willekeurige rij van reële getallen

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Met behulp van de termen van deze rij construeren we een nieuwe rij

$$s_1, s_2, s_3, \dots,$$

volgens het voorschrift

$$(8.13) \quad \begin{cases} s_1 = a_1 \\ s_2 = a_1 + a_2 \\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \\ s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n. \end{cases}$$

Deze rij s_n wordt de bij de rij a_n behorende reeks genoemd. Doorgaans wordt deze somrij aangeduid als de reeks $\sum a_n$.

Als de rij s_n convergent is, met limiet S , dan zeggen we dat de reeks $\sum a_n$ convergeert en S tot som heeft. De gebruikelijke notatie hiervoor is

$$(8.14) \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\text{of} \quad S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Opmerking

In de literatuur wordt een uitdrukking van de vorm

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

vaak aangeduid als "reeks", ook wanneer er niets bekend is over eventuele convergentie van de rij s_n . De getallen $s_1, s_2, s_3, \dots$ worden dan "de partiële sommen" van "de reeks" genoemd.

Voorbeeld 8.2

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad (n=1,2,3,\dots).$$

De bij de rij a_n behorende reeks is

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Dus
$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Hieruit volgt dat s_n de limiet 1 heeft:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$$

of

$$(8.15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Convergentie-kriteria voor reeksenDefinitie 8.7

De reeks $\sum a_n$ wordt absoluut convergent genoemd als de reeks $\sum |a_n|$ convergent is.

Zonder bewijs vermelden we enkele stellingen, met behulp waarvan we in een aantal eenvoudige gevallen kunnen uitmaken of een reeks al dan niet convergent is.

R1: Een absoluut convergente reeks is convergent.

Anders geformuleerd:

Als
$$s_n^* = \sum_{k=1}^n |a_k|$$

een limiet heeft voor $n \rightarrow \infty$, dan heeft ook

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

een limiet voor $n \rightarrow \infty$.

R2: Geldt voor een rij a_n dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1 ,$$

dan is de reeks $\sum a_n$ convergent.

R3: Heeft de reeks $\sum a_n$ louter positieve termen en is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1 ,$$

dan is de reeks $\sum a_n$ convergent.

R4: Een noodzakelijke voorwaarde voor de convergentie van een reeks

$\sum a_n$ is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 .$$

Deze voorwaarde is evenwel niet voldoende, wat in de voorbeelden 8.3 en 8.4 zal worden aangetoond.

Voorbeeld 8.3

We beschouwen de zg. harmonische reeks; d.w.z. de reeks bij de rij $a_n = \frac{1}{n}$. Nu geldt

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} .$$

De algemene term $\frac{1}{k}$ van deze reeks heeft de limiet 0. Toch is de reeks divergent, wat uit onderstaande schatting blijkt.

$$\begin{aligned} s_{10^n} &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{10^2}\right) + \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{10^3}\right) + \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{10^{n-1}+1} + \frac{1}{10^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{10^n}\right) > \\ &> 1 + 9 \cdot \frac{1}{10} + 90 \cdot \frac{1}{100} + \dots + (10^n - 10^{n-1}) \cdot \frac{1}{10^n} = 1 + (n-1) \cdot \frac{9}{10} > \\ &> \frac{9}{10} \cdot n . \end{aligned}$$

Omdat s_n bovendien monotoon stijgend is, moet wel gelden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty,$$

waarmee we slechts willen aangeven dat s_n onbeperkt groot wordt voor $n \rightarrow \infty$.

s_n heeft dus geen limiet; m.a.w. de reeks $\sum \frac{1}{k}$ is divergent.

Voorbeeld 8.4

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Nu is

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Hoewel de algemene term van de reeks naar 0 convergeert, is de reeks toch divergent.

Dat de in dit voorbeeld genoemde reeks divergent is, hadden we ook kunnen afleiden uit de divergentie van de reeks uit voorbeeld 8.3.

Immers

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty,$$

waarmee we slechts willen aangeven dat de reeks $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergent is.

Voorbeeld 8.5

De meetkundige reeks

De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ is convergent voor $|x| < 1$ en voor de som geldt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Bewijs:

$$\sum_{n=0}^{k-1} x^n = \frac{1-x^k}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^k}{1-x}.$$

Om te bewijzen dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ convergent is met de som $\frac{1}{1-x}$, moeten we dus aantonen dat

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^k}{1-x} = 0 \quad \text{of} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = 0 \quad (|x| < 1).$$

Het geval $x = 0$ levert geen moeilijkheden op.

Uit $0 < |x| < 1$ volgt dat de rij

$$(8.16) \quad |x|, |x|^2, |x|^3, \dots$$

monotoon dalend is en tevens begrensd. Volgens stelling L5 bezit de rij nu een limiet; we zullen deze p noemen. Vermenigvuldigt men elke term van (8.16) met $|x|$, dan ontstaat een nieuwe rij, die de limiet $|x|p$ zal hebben (zie L3). Deze nieuwe rij is echter dezelfde als (8.16), wanneer men daaruit de beginterm weglaat. We vinden dus

$$|x|p = p.$$

Wegens $|x| \neq 1$ moeten we besluiten tot $p = 0$.

Dubbelreeksen

Ook de aan het slot van paragraaf 7 behandelde dubbelsommen kunnen convergeren, d.w.z. een eindige limiet hebben als men het aantal termen laat aangroeien. In (7.17) zou men het getal 6 door een steeds groter getal kunnen vervangen. Het verwisselen van de sommatie-volgorde blijft geoorloofd, mits de dubbelreeks hetzij absoluut convergent is ($\sum_n \sum_m |f(m,n)|$ convergeert), hetzij uitsluitend uit niet-negatieve termen bestaat. Wij gaan hier niet nader op in.

9. Differentiaalrekening.

Voordat we een analytische definitie geven van het differentiaal-quotiënt, zullen we dit begrip minder exakt bespreken aan de hand van figuur 9.1.

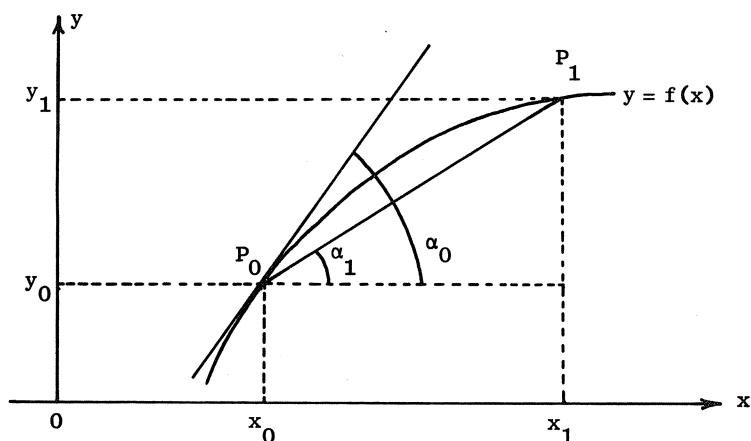


fig. 9.1

Stel P_0 een punt op de kromme $y = f(x)$. We definiëren de raaklijn aan de kromme in P_0 als de limietstand van een koorde P_0P_1 , als P_1 langs de kromme naar P_0 beweegt. Hiervoor is het nodig dat de hoek α_1 die P_0P_1 met de x -as maakt, een limiet α_0 bezit. Dus, in een gemakkelijk te begrijpen notatie,

$$(9.1) \quad \lim_{P_1 \rightarrow P_0} \alpha_1 = \alpha_0.$$

Zijn nu $x_0, y_0 (= f(x_0))$ en $x_1, y_1 (= f(x_1))$ de coördinaten van resp. P_0 en P_1 , dan zal dus moeten gelden

$$(9.2) \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Met het oog op (9.1) kunnen we nu schrijven

$$(9.3) \quad \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg} \alpha_0 .$$

Deze limiet bestaat echter niet altijd.

Onafhankelijk van een meetkundige voorstelling geeft men nu de volgende definitie:

Definitie 9.1

$$(9.4) \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

is het differentiaalquotiënt van de functie $f(x)$ in het punt x_0 , mits de limiet bestaat.

Uit het bestaan van (9.4) volgt dat

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{f(x_0+h) - f(x_0)\} = 0 .$$

Dus: een differentieerbare functie is noodzakelijk continu. Het omgekeerde geldt echter niet. Een continue functie is niet noodzakelijk differentieerbaar.

Tot nu toe hebben we het differentiaalquotiënt bekeken in een vast punt x_0 . Laten we nu in (9.4) x_0 veranderen; dan zal ook het bijbehorende differentiaalquotiënt veranderen. We kunnen dus het differentiaalquotiënt als een functie van x beschouwen. Van deze functie $f'(x)$ kunnen we weer het differentiaalquotiënt overeenkomstig (9.4) bepalen.

Definitie 9.2

$$(9.5) \quad \left. \frac{df'(x)}{dx} \right|_{x_0} = f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}$$

is het tweede differentiaalquotiënt van de functie $f(x)$ in het punt x_0 , mits de limiet bestaat.

Zo voortgaande kan men alle hogere differentiaalquotiënten definiëren (onder het voorbehoud dat ze bestaan).

In plaats van differentiaalquotiënt gebruikt men ook vaak de term afgeleide. Men spreekt dan van de eerste afgeleide (kortweg afgeleide), de tweede afgeleide, etc.

Enige rekenregels voor differentiaalquotiënten.

1. Als de functies $f(x)$ en $g(x)$ differentieerbaar zijn in $x = x_0$ met de afgeleiden $f'(x_0)$ resp. $g'(x_0)$, dan is ook de functie $\phi(x) = f(x) + g(x)$ differentieerbaar in $x = x_0$ met als afgeleide

$$(9.6) \quad \phi'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) .$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x_0+h) - \phi(x_0)}{h} &= \\ &= \frac{\{f(x_0+h) + g(x_0+h)\} - \{f(x_0) + g(x_0)\}}{h} = \\ &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} . \end{aligned}$$

Hieruit volgt door de limiet-overgang $h \rightarrow 0$ vrijwel direkt het gestelde.

2. Maken we dezelfde veronderstellingen als onder 1, dan is ook de functie $\phi(x) = f(x) \cdot g(x)$ differentieerbaar in $x = x_0$ en wel met de afgeleide

$$(9.7) \quad \phi'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) .$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x_0+h) - \phi(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} = \\ &= \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0+h) + f(x_0) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} = \end{aligned}$$

$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} g(x_0+h) + f(x_0) \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} ,$$

waaruit door de limiet-overgang $h \rightarrow 0$ het gestelde volgt.

Dat $\lim_{h \rightarrow 0} g(x_0+h)$ gelijk is aan $g(x_0)$, volgt uit de continuïteit van $g(x)$ in $x = x_0$.

3. Als $f(x)$ differentieerbaar is in $x = x_0$, dan is ook $\phi(x) = c \cdot f(x)$ differentieerbaar in $x = x_0$ en wel met de afgeleide

$$(9.8) \quad \phi'(x_0) = c \cdot f'(x_0) .$$

Hierbij is c een constante.

Bewijs:

Dit wordt aan de lezer overgelaten.

4. Als $f(x)$ en $g(x)$ differentieerbaar zijn in $x = x_0$ met de afgeleiden $f'(x_0)$ resp. $g'(x_0)$, dan is ook $\phi(x) = f(x) - g(x)$ differentieerbaar in $x = x_0$ en wel met de afgeleide

$$(9.9) \quad \phi'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) .$$

Eerste bewijs: Analoog aan het bewijs onder 1.

Tweede bewijs: Stel $c = -1$ in 3 en pas daarna 1 toe.

5. Als de functies $f_i(x)$ ($i=1,2,\dots,n$) differentieerbaar zijn in $x = x_0$ met de afgeleiden $f'_i(x_0)$, dan is ook $\phi(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x)$ differentieerbaar in $x = x_0$ en wel met de afgeleide

$$(9.10) \quad \begin{aligned} \phi'(x_0) = & f'_1(x_0) \cdot f_2(x_0) \dots f_n(x_0) + f_1(x_0) \cdot f'_2(x_0) \dots f_n(x_0) + \\ & + \dots + f_1(x_0) \cdot f_2(x_0) \dots f'_n(x_0) . \end{aligned}$$

6. Zijn $f(x)$ en $g(x)$ differentieerbaar in $x = x_0$, dan is ook $\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ differentieerbaar in $x = x_0$ mits $g(x_0) \neq 0$. Voor de afgeleide geldt

$$(9.11) \quad \phi'(x_0) = \frac{g(x_0) \cdot f'(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{g^2(x_0)} .$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x_0+h) - \phi(x_0)}{h} &= \frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} = \\ &= \frac{\frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0)}{h} - \frac{f(x_0) \cdot g(x_0+h)}{h}}{g(x_0+h) \cdot g(x_0)} = \\ &= \frac{g(x_0) \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f(x_0) \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}{g(x_0+h) \cdot g(x_0)} , \end{aligned}$$

waaruit door de limiet-overgang $h \rightarrow 0$ het gestelde volgt.

Differentiatie van enige eenvoudige functies.

1. $f(x) = c$ ($c = \text{constante}$). Voor elke waarde van x heeft de functie dezelfde waarde c , dus

$$(9.12) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c-c}{h} = 0 .$$

2. $f(x) = x$. De afgeleide is

$$(9.13) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = 1 .$$

3. $f(x) = x^n$ (n geheel en positief). Toepassing van de produktregel

(9.10) op $x^n = x \cdot x \dots x$ geeft:

$$(9.14) \quad f'(x) = 1 \cdot x^{n-1} + 1 \cdot x^{n-1} + \dots + 1 \cdot x^{n-1} = nx^{n-1} .$$

Opgave

Tracht dit resultaat ook te bereiken met behulp van de definitie van het differentiaalquotiënt en het binomium van Newton.

4. $f(x) = \frac{1}{x^n}$ (n geheel en positief). Toepassing van de quotiëntenregel (9.11), (9.12) en (9.14) geeft

$$(9.15) \quad f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1} \quad (x \neq 0) .$$

5. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Toepassing van (9.6), (9.8) en (9.14) geeft

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 .$$

Bij differentiatie van een veelterm ontstaat een nieuwe veelterm, waarvan de graad één lager is dan die van de oorspronkelijke veelterm. Van een veelterm van de n^{de} graad zijn dus de $(n+1)^{\text{ste}}$ en hogere afgeleiden alle identiek gelijk aan nul.

De afgeleide van de inverse functie.

We hebben reeds opgemerkt dat een continue functie $f(x)$ een continue inverse functie $\phi(t)$ heeft in elk interval waar die functie monotoon is. In aansluiting hierop geldt nu de volgende stelling:

Stelling 9.1

Als de monotone functie $f(x)$ op een interval D differentieerbaar is ^{*)}, dan bezit de inverse functie $\phi(t)$ ook een afgeleide in elk punt van het interval $D\phi (= Rf)$.

Voor de afgeleide van de functie $\phi(t)$ in t_0 geldt

$$(9.16) \quad \phi'(t_0) = \frac{1}{\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{\phi(t_0)}} .$$

*) met $f'(x) \neq 0$ op D

Bewijs:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(t_0+h) - \phi(t_0)}{h} &= \frac{\phi(t_0+h) - \phi(t_0)}{(t_0+h) - t_0} = \\ &= \frac{\phi(t_0+h) - \phi(t_0)}{f(\phi(t_0+h)) - f(\phi(t_0))} = \frac{1}{\frac{f(\phi(t_0+h)) - f(\phi(t_0))}{\phi(t_0+h) - \phi(t_0)}} \end{aligned}$$

In verband met de continuïteit van $\phi(t)$ in t_0 volgt hieruit door de limiet-overgang $h \rightarrow 0$ het gestelde.

Voorbeeld 9.1

De functie $f(x) = x^n$ is continu en monotoon stijgend op $x > 0$. De omkeerfunctie $\phi(t)$ is de functie $\phi(t) = t^{\frac{1}{n}}$ op $t > 0$. Volgens (9.16) vinden we voor de afgeleide van $\phi(t)$

$$\phi'(t) = \frac{1}{f'(\phi(t))} = \frac{1}{n(\phi(t))^{n-1}} = \frac{1}{n\left(\frac{1}{t}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1}.$$

Differentiatie van samengestelde functies.

Stel $\phi(u)$ een functie op het interval $\alpha \leq u \leq \beta$, zodanig dat voor elke waarde van u uit dit interval geldt $a \leq \phi(u) \leq b$.

Als $f(x)$ nu gedefinieerd is op het interval $a \leq x \leq b$, dan is $f(\phi(u))$ een functie van u op het interval $\alpha \leq u \leq \beta$.

Voorbeeld 9.2

$$\phi(u) = u^2 + \sqrt{u} \quad \text{op } u > 0; \quad f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{op } x > 0.$$

$$\text{Dan is } f(\phi(u)) = \sqrt[3]{u^2 + \sqrt{u}} \quad \text{op } u > 0.$$

Stelling 9.2 (kettingregel)

Als $\phi(u)$ differentieerbaar is op $\alpha \leq u \leq \beta$, terwijl $a \leq \phi(u) \leq b$, en $f(x)$ is differentieerbaar op $a \leq x \leq b$, dan is $f(\phi(u))$ differentieerbaar op $\alpha \leq u \leq \beta$.

Voor de afgeleide geldt

$$(9.17) \quad \left. \frac{df(\phi(u))}{du} \right|_{u_0} = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{\phi(u_0)} \cdot \left. \frac{d\phi(u)}{du} \right|_{u_0}.$$

Bewijs:

$$\text{Voor } \frac{f(\phi(u)) - f(\phi(u_0))}{u - u_0} \text{ kunnen we schrijven}$$

$$\frac{f(\phi(u)) - f(\phi(u_0))}{\phi(u) - \phi(u_0)} \cdot \frac{\phi(u) - \phi(u_0)}{u - u_0},$$

als $\phi(u) \neq \phi(u_0)$ voor $u \neq u_0$. Laten we nu u tot u_0 naderen, dan vinden we vrijwel direkt (9.17).

Formule (9.17) kan evenwel ook bewezen worden zonder de beperkende veronderstelling $\phi(u) \neq \phi(u_0)$ voor $u \neq u_0$.

Voorbeeld 9.3

Bepaal de afgeleide van $\sqrt[3]{u^2 + \sqrt{u}}$ op $u > 0$.

Oplossing:

Stel $\phi(u) = u^2 + \sqrt{u}$ en $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

De afgeleide van $\sqrt[3]{u^2 + \sqrt{u}} = f(\phi(u))$ is dus gelijk aan het produkt van $f'(\phi(u))$ en $\phi'(u)$. Nu is

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3 x^{\frac{2}{3}}} \quad \text{en} \quad \phi'(u) = 2u + \frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

Dus

$$\frac{df(\phi(u))}{du} = \frac{1}{3(u^2 + \sqrt{u})^{\frac{2}{3}}} \left(2u + \frac{1}{2\sqrt{u}}\right).$$

Voorbeeld 9.4

Bepaal de afgeleide van $u^{\frac{p}{q}}$ op $u > 0$.

Oplossing:

Stel $f(x) = x^p$ en $\phi(u) = u^{\frac{1}{q}}$.

Dan geldt

$$\frac{df(\phi(u))}{du} = p \phi^{p-1}(u) \cdot \frac{1}{q} u^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} u^{\frac{p}{q}-1}.$$

Hiermede is nu bewezen dat voor alle rationale getallen geldt

$$(9.18) \quad \frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0).$$

Een middelwaarde stelling.

Zonder bewijs geven we de volgende stelling:

Stelling 9.3

Is $f(x)$ op $a < x < b$ differentieerbaar en bovendien continu in a en b , dan is er een getal ξ tussen a en b met de eigenschap

$$(9.19) \quad f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(\xi).$$

De meetkundige betekenis van deze stelling wordt geïllustreerd in figuur 9.2.

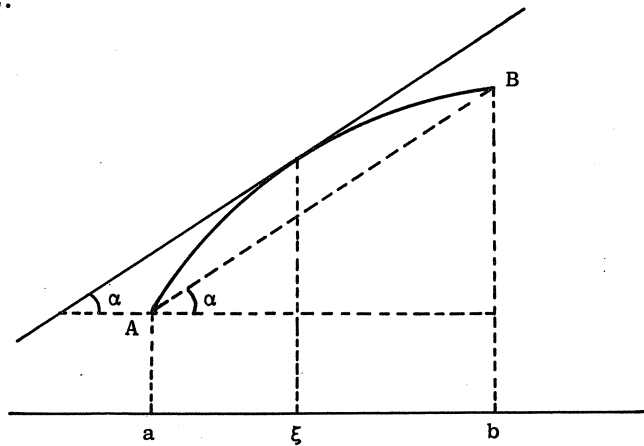


fig. 9.2

De (eerste) middelwaarde-stelling uit de differentiaalrekening zegt, dat er tussen a en b een punt ξ bestaat, zodanig dat de raaklijn aan de kromme $y = f(x)$ in het punt $(\xi, f(\xi))$ evenwijdig loopt met de koorde die A en B verbindt; anders geformuleerd

$$(9.20) \quad f'(\xi) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Toepassingen.

1. Als voor de afgeleide $f'(x)$ van de functie $f(x)$ op het interval $a \leq x \leq b$ steeds geldt $f'(x) > 0$, dan is $f(x)$ op dat interval monotoon stijgend.

Bewijs:

Kies op $a \leq x \leq b$ twee punten x_1 en x_2 zodanig dat $x_1 < x_2$. Volgens de eerste middelwaarde-stelling geldt dan $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(\xi)$ voor zekere ξ met $x_1 < \xi < x_2$. Daar volgens het gegeven voor ξ geldt $f'(\xi) > 0$, vinden we $f(x_2) - f(x_1) > 0$ of $f(x_1) < f(x_2)$.

2. Is $f(x)$ op zeker interval differentieerbaar met $f'(x) = 0$ voor elke x uit dit interval, dan is $f(x)$ een constante functie.

Bewijs:

Zij $x_1 \neq x_2$ dan geldt volgens de middelwaarde-stelling $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) \cdot f'(\xi) = (x_1 - x_2) \cdot 0 = 0$, dus $f(x_1) = f(x_2)$.

De exponentiële functie $E(x)$.

In vrijwel alle delen van de wiskunde speelt de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

een bijzonder belangrijke rol.

We onderzoeken deze reeks op convergentie m.b.v. R3. Kiezen we voor x een vaste waarde $x_0 \neq 0$ en beschouwen we de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x_0^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_0|^n}{n!}$$

dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x_0|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x_0|^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_0|}{n+1} = 0 < 1 .$$

De te onderzoeken reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ is dus voor elke waarde van x absoluut convergent.

Voor de som van de reeks, die afhankelijk is van x , schrijven we

$$(9.21) \quad E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

Zonder bewijs vermelden we dat $E(x)$ overal differentieerbaar is en dat de afgeleide functie gevonden wordt door de reeks termsgewijs te differentiëren. Dus

$$(9.22) \quad E'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = E(x) .$$

De functie $E(x)$ heeft dus de zeer merkwaardige eigenschap gelijk te zijn aan zijn afgeleide $E'(x)$.

Met behulp van deze eigenschap kunnen we tal van andere eigenschappen van $E(x)$ zeer eenvoudig afleiden. Beschouwen we bijv. de functie

$$\phi(x) = E(x) \cdot E(-x) .$$

Hiervoor geldt

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= E'(x) \cdot E(-x) + E(x) \cdot \{E(-x)\}' = \\ &= E(x) \cdot E(-x) + E(x) \cdot \{-E(-x)\} = \\ &= E(x) \cdot E(-x) - E(x) \cdot E(-x) = 0 . \end{aligned}$$

De functie $\phi(x)$ heeft dus in elk punt de afgeleide 0 en is derhalve constant. Daar

$$\phi(0) = E(0) \cdot E(-0) = E^2(0) = 1 ,$$

geldt dus

$$\phi(x) = E(x) \cdot E(-x) = 1 \quad \text{voor elke } x .$$

Dit resultaat kan ook geschreven worden als

$$(9.23) \quad E(-x) = \frac{1}{E(x)} .$$

Uit bovenstaande formules volgt vrijwel direkt dat $E(x) \neq 0$ is voor elke waarde van x . Uit de definitie van $E(x)$ volgt dat $E(x)$ positief is voor $x \geq 0$. Uit (9.23) volgt dan dat $E(x)$ ook positief is voor $x < 0$. Dus $E(x) > 0$ voor elke x . Omdat $E'(x) = E(x)$ geldt dus ook $E'(x) > 0$ voor elke x . Hieruit volgt dat $E(x)$ monotoon stijgend is.

Voor $x > 0$ geldt (zie (9.21)) $E(x) > x$, dus $\lim_{x \rightarrow \infty} E(x) = +\infty$, waar weer uit volgt

$$(9.24) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} E(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{E(x)} = 0 .$$

Beschouwen we nu de functie

$$\psi(x) = \frac{E(x)}{E(x+a)} ,$$

dan geldt

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{E(x+a) \cdot E'(x) - E'(x+a) \cdot E(x)}{E^2(x+a)} = \\ &= \frac{E(x+a) \cdot E(x) - E(x+a) \cdot E(x)}{E^2(x+a)} = 0 . \end{aligned}$$

De functie $\psi(x)$ is dus een constante functie en daar $\psi(0) = \frac{E(0)}{E(a)} = \frac{1}{E(a)}$ geldt

$$\frac{E(x)}{E(x+a)} = \frac{1}{E(a)}$$

of

$$(9.25) \quad E(x+a) = E(x) \cdot E(a)$$

voor elke x en elke a .

Stellen we

$$(9.26) \quad E(1) = E ,$$

dan vinden we voor q geheel en positief:

$$E = E(1) = E(q \cdot \frac{1}{q}) = \{E(\frac{1}{q})\}^q$$

of

$$E(\frac{1}{q}) = E^{\frac{1}{q}}.$$

Voor $E(\frac{p}{q})$ vinden we zo (p en q geheel en positief)

$$E(\frac{p}{q}) = E(p \cdot \frac{1}{q}) = \{E(\frac{1}{q})\}^p = E^{\frac{p}{q}}.$$

Voor rationale getallen $r \geq 0$ geldt dus

$$E(r) = E^r.$$

Is het rationale getal $r < 0$, dan stellen we $r = -p$ met $p > 0$, dus

$$E(r) = E(-p) = \frac{1}{E(p)} = \frac{1}{E^p} = E^{-p} = E^r.$$

Hiermee is aangetoond dat voor elk rationaal getal r geldt

$$(9.27) \quad E(r) = E^r.$$

Zij α nu een irrationaal getal en $r_1, r_2, r_3, \dots$ een rij rationale getallen met de limiet α . Op grond van de continuïteit van $E(x)$ kunnen we nu zeggen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(r_n) = E(\alpha).$$

Daar het in de analyse gebruikelijk is a^α (α irrationaal) te definiëren als

$$a^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}, \quad (r_n \text{ rationaal, } a > 0) \quad *)$$

waarbij r_n een rij is met de limiet α , kunnen we dus schrijven

$$E(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E^{r_n} = E^\alpha.$$

*) Deze limiet bestaat en is verder onafhankelijk van de keuze van de rij r_n .

Hiermee is bewezen dat voor alle reële getallen x geldt

$$(9.28) \quad E(x) = E^x,$$

waarbij

$$(9.29) \quad E = E(1) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$$

10. Maxima en minima van functies van één variabele.

We zullen nu veronderstellen dat de functie $f(x)$ tweemaal differentieerbaar is en dat de tweede afgeleide continu is.

De afgeleide $f'(x)$ van een functie $f(x)$ geeft de helling van de kromme $y = f(x)$ aan. Deze helling kan weer voorgesteld worden door een kromme $y = f'(x)$. De helling van deze kromme wordt bepaald door de afgeleide van $f'(x)$, de tweede afgeleide $f''(x)$ van $f(x)$.

Wanneer de tweede afgeleide $f''(x)$ positief is in het punt x_0 , dan is $f''(x)$ positief in een klein interval dat het punt x_0 bevat. Dit volgt uit de veronderstelde continuïteit van $f''(x)$. De afgeleide $f'(x)$ neemt dus toe in dat interval en de kromme $y = f(x)$ keert zijn bolle kant naar de x -as (zie figuur 10.1). Wanneer $f''(x_0) < 0$ is, geldt het omgekeerde en keert de kromme $y = f(x)$ de holle kant in de richting van de x -as (zie figuur 10.2).

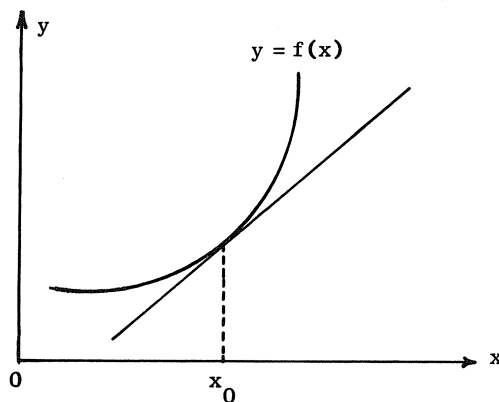


fig. 10.1

$$\underline{f''(x_0) > 0}$$

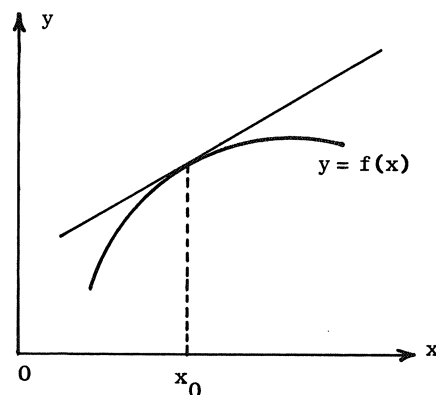


fig. 10.2

$$\underline{f''(x_0) < 0}$$

Wanneer $f''(x_0) > 0$ is, zal de kromme $y = f(x)$ in de omgeving van x_0 boven de raaklijn aan de kromme in x_0 liggen. Wanneer $f''(x_0) < 0$ is, zal de kromme onder de raaklijn liggen.

Definitie 10.1

Een functie $f(x)$ heeft een relatief maximum (minimum) in een punt c , wanneer in een omgeving van c de waarde van $f(x)$ voor alle $x \neq c$ kleiner (groter) is dan $f(c)$. Een omgeving van een punt c is een interval $a < x < b$, dat het punt c (inwendig) bevat ($a < c < b$). Men spreekt van relatieve extreme waarden, omdat het maximum of minimum slechts betrekking heeft op een omgeving. Geometrisch zijn deze maxima en minima de toppen en dalen van de kromme $y = f(x)$ (zie figuur 10.3). Het absolute maximum definiëren we als het grootste der relatieve maxima.

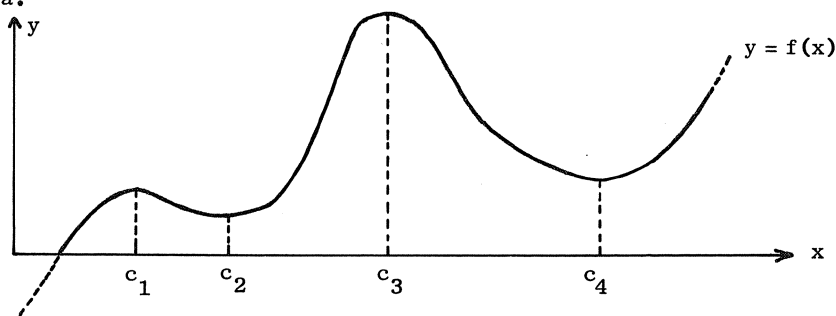


fig. 10.3

Relatieve maxima en minima

Een bepaald relatief maximum kan zeer goed kleiner zijn dan een relatief minimum. In figuur 10.3 bijv. is het relatief maximum in c_1 kleiner dan het relatief minimum in c_4 .

Stelling 10.1

Een noodzakelijke voorwaarde voor het optreden van een relatief maximum of minimum in het punt c van de differentieerbare functie $f(x)$ luidt

$$(10.1) \quad f'(c) = 0 .$$

Aan de hand van figuur 10.3 is het duidelijk dat in een extreem punt de raaklijn horizontaal moet zijn en dus (10.1) moet gelden. Een exact bewijs van (10.1) loopt als volgt:

Bewijs:

Stel $f(x)$ neemt in c een relatief minimum aan. Voor voldoende kleine $|h|$ is $f(c+h) - f(c) > 0$. Het teken van het quotiënt

$$(10.2) \quad \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

zal dus overeenkomen met het teken van h . Is nu $h < 0$ en laten we h tot nul naderen, zodanig dat steeds $h < 0$, dan blijft het quotiënt (10.2) negatief. Voor de limiet zal dus gelden $f'(c) \leq 0$. Kiezen we nu $h > 0$ en laten we h tot nul naderen, steeds $h > 0$ houdende, dan volgt hieruit $f'(c) \geq 0$. Uit de beide betrekkingen $f'(c) \leq 0$ en $f'(c) \geq 0$ volgt $f'(c) = 0$.

Op dezelfde wijze kan men bewijzen dat $f'(c) = 0$, wanneer $f(x)$ in c een maximum heeft.

We hebben gezien dat, wanneer $f''(c) > 0$, de kromme $y = f(x)$ in de omgeving van c boven de raaklijn aan de kromme in c ligt. Wanneer dus $f''(c) > 0$ en $f'(c) = 0$, dan bezit de functie $f(x)$ een minimum in c . Wanneer $f''(c) < 0$, dan ligt de kromme $y = f(x)$ onder de raaklijn in het punt c . Is dus $f'(c) = 0$ en $f''(c) < 0$, dan bezit de functie $f(x)$ in c een maximum.

Stelling 10.2

Een tweemaal differentieerbare functie $f(x)$ bezit in het punt c een relatief maximum, wanneer $f'(c) = 0$ en $f''(c) < 0$.

Het punt c is een relatief minimum wanneer $f'(c) = 0$ en $f''(c) > 0$.

Voorbeeld 10.1

Bepaal de relatieve extrema van de functie $f(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 3$.

Oplossing:

$$f'(x) = 3x^2 + 10x + 8 = (x+2)(3x+4),$$

$$f''(x) = 6x + 10.$$

$f'(x) = 0$ voor $x = -2$ en $x = -\frac{4}{3}$. Verder is $f''(-2) = -2 < 0$ en $f''(-\frac{4}{3}) = +2 > 0$. De onderzochte functie bezit dus in $x = -2$ een maximum en in $x = -\frac{4}{3}$ een minimum.

Extrema bij rijen.

Definitie 10.2

De rij a_n heeft in het punt $n = n_0$ een relatief maximum als

$$(10.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(n_0+1) \leq f(n_0) \\ \text{en} \\ f(n_0-1) \leq f(n_0) \end{array} \right.$$

Definitie 10.3

De rij a_n heeft in het punt $n = n_0$ een relatief minimum als

$$(10.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(n_0+1) \geq f(n_0) \\ \text{en} \\ f(n_0-1) \geq f(n_0) \end{array} \right.$$

Definitie 10.4

De rij a_n heeft in het punt $n = n_0$ een absoluut maximum als

$$f(n) \leq f(n_0) \quad \text{voor elke } n.$$

Opgave

- a. Geef de definitie van een absoluut minimum van een rij a_n .
- b. Tracht de definities betreffende de extrema van rijen a_n uit te breiden tot definities betreffende extrema van dubbelrijen.

Voorbeeld 10.2

Bepaal de extrema van de rij

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-k} (n-3-k-m).$$

Oplossing:

Een minimum van a_n voldoet aan de relaties:

$$a_n - a_{n-1} \leq 0 \text{ en } a_n - a_{n+1} \leq 0.$$

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-k} (n-3-k-m) - \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{m=1}^{n-1-k} (n-1-3-k-m) = \\ &= \sum_{m=1}^{n-(n-1)} \{n-3-(n-1)-m\} + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{m=1}^{n-k} (n-3-k-m) - \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{m=1}^{n-1-k} (n-4-k-m) = \\ &= \sum_{m=1}^1 (-2-m) + \sum_{k=1}^{n-2} \left\{ \sum_{m=1}^{n-1-k} (n-3-k-m) + (-3) \right\} - \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{m=1}^{n-1-k} (n-4-k-m) = \\ &= -3 + \sum_{k=1}^{n-2} (-3) + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{m=1}^{n-1-k} \{(n-3-k-m) - (n-4-k-m)\} = \\ &= -3 - 3(n-2) + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{m=1}^{n-1-k} 1 = -3n + 3 + \sum_{k=1}^{n-2} (n-1-k) = \\ &= -3n + 3 + \frac{1}{2}(n-2)(n-1) = \frac{1}{2}(n-8)(n-1). \end{aligned}$$

Dus $a_n - a_{n-1} \leq 0$ als $1 \leq n \leq 8$.

Verder geldt: $a_n - a_{n+1} = -(a_{n+1} - a_n) = -\frac{1}{2}(n-7)n$.

Dus $a_n - a_{n+1} \leq 0$ als $n \geq 7$.

De rij a_n is dus minimaal in de punten $n = 7$ en $n = 8$. (Ga na dat deze minima gelijk zijn aan -28).

Opgave

Bepaal de waarde van n waarvoor a_n een relatief maximum aanneemt.

Bereken deze maximale waarde. (Antwoord: $n = 1$, $a_1 = 0$).

11. Integraalrekening.

De bepaalde integraal.

We veronderstellen voorlopig dat de functie $f(x)$ continu en positief is op het interval $a \leq x \leq b$; verderop zullen wij deze restrictie laten vervallen. Grafisch stellen we de functie weer voor door een kromme. Wij vragen nu naar de oppervlakte F_a^b van het gebied dat begrensd wordt door de kromme $y = f(x)$, de vertikalen in a en b en de x -as tussen a en b (zie figuur 11.1).

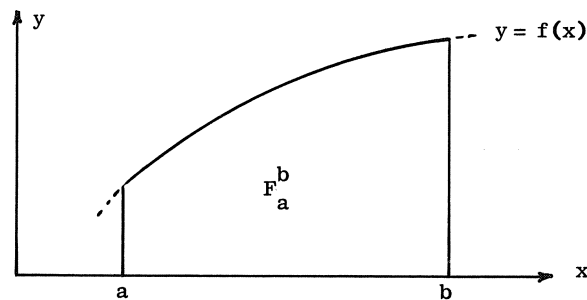


fig. 11.1

De bepaalde integraal

Deze oppervlakte noemen we de bepaalde integraal van de functie $f(x)$ tussen de grenzen a en b . Oppervlakten waarvan de begrenzingen niet uit rechten bestaan, kunnen we in het algemeen niet rechtstreeks bepalen. De oppervlakte F_a^b kan men echter beschouwen als de limietwaarde van een som van oppervlakten van rechthoeken. We verdelen de x -as tussen a en b in n gelijke delen en richten in ieder deelpunt de vertikaal op. Het oppervlak wordt hierdoor in n delen verdeeld. Vervolgens bepalen we in elk deelinterval de grootste en kleinste functiewaarde. Tenslotte construeren we twee rijen rechthoeken met als basis de lengte van het deelinterval van de x -as en als hoogte de grootste en de kleinste functiewaarde in dat interval (zie figuur 11.2).

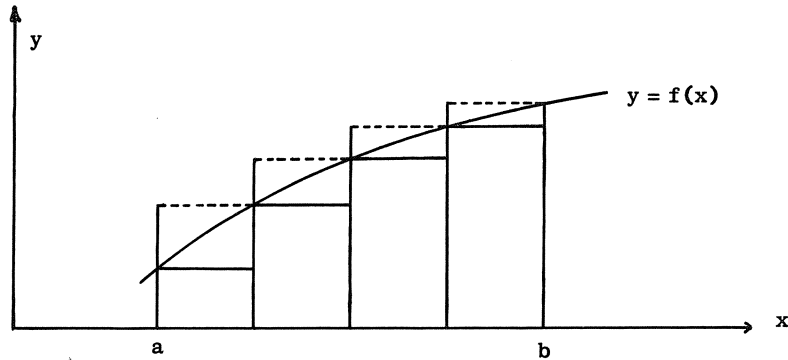


fig. 11.2

Benadering van de bepaalde integraal met behulp van
in- en omgeschreven rechthoeken

De som van de oppervlakten van de eerste rij rechthoeken, dus de rechthoeken met als hoogten de grootste functiewaarden in de opvolgende deelintervallen (in figuur 11.2 zijn van deze rechthoeken de bovenste begrenzingsen gestippeld), geven we aan met $\bar{F}_n$. De som van de oppervlakten van de rechthoeken waarvan de hoogten gelijk zijn aan de kleinste functiewaarden in de opvolgende deelintervallen geven we aan met $\underline{F}_n$. Het is dan duidelijk dat de relatie

$$(11.1) \quad \underline{F}_n \leq F_a^b \leq \bar{F}_n$$

geldt voor elke n . Wordt de verdeling van het interval $[a, b]$ fijner gemaakt door n groter te kiezen, dan zal het verschil $\bar{F}_n - \underline{F}_n$ naar nul convergeren wanneer n willekeurig toeneemt. $\underline{F}_n$ en $\bar{F}_n$ bezitten dus dezelfde limiet F_a^b met

$$(11.2) \quad F_a^b = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{F}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{F}_n.$$

Deze stelling, die we niet zullen bewijzen, houdt in dat men aan het gebied onder een continue kromme een bepaalde numerieke waarde kan toekennen.

Dezelfde limiet F_a^b wordt verkregen, wanneer het interval $[a, b]$ in n willekeurige deelintervallen wordt verdeeld, op de deelintervallen

rechthoeken worden opgericht op dezelfde wijze als hierboven, en men vervolgens n willekeurig laat toenemen, zodanig dat de lengte van het langste deelinterval (de grofheid van de onderverdeling) willekeurig klein wordt. Tenslotte is het niet noodzakelijk dat men voor de hoogte van de rechthoeken hetzij de grootste of de kleinste functiewaarde in een deelinterval kiest. Kiest men als hoogte voor de rechthoeken een functiewaarde tussen de grootste en kleinste in, dan verkrijgt men dezelfde limiet.

De tot nu toe gehouden redenering kan zonder moeite uitgebreid worden tot functies die in het interval ook negatieve waarden aannemen. Wel moet uiteraard steeds rekening gehouden worden met het teken dat bij de oppervlakten behoort: een oppervlak boven de x -as geeft een positieve bijdrage en één onder de x -as een negatieve.

De bepaalde integraal van een willekeurige functie $f(x)$ tussen de grenzen a en b kan nu als volgt worden gevonden: verdeel het interval $a \leq x \leq b$ in n deelintervallen met deelpunten $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$, kies in elk deelinterval een punt ξ_i , dus in het i de deelinterval $[x_{i-1}, x_i]$ een punt ξ_i en vorm de som

$$(11.3) \quad \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Men kan nu de volgende definitie geven:

Definitie 11.1

Wanneer de limiet van de som (11.3) bij onbepaalde toename van n , zodanig dat de lengte van het grootste en dus van alle deelintervallen willekeurig klein wordt, bestaat, dan noemt men die limiet de bepaalde integraal van $f(x)$ tussen de grenzen a en b . De functie $f(x)$ wordt in dit geval integreerbaar op het interval $[a, b]$ genoemd.

Men schrijft de bepaalde integraal als

$$(11.4) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

In de integraalrekening moet men dus steeds nagaan of deze limiet bestaat. Dit wordt vereenvoudigd door zg. existentietheorema's, waarin het bestaan van deze limiet voor klassen van functies wordt bewezen.

Eén van deze stellingen houdt in dat de integraal over een eindig gesloten interval van een begrensde functie bestaat, wanneer de functie op dit interval continu is of hoogstens eindig veel discontinuïteiten bevat.

In de definitie van de bepaalde integraal hebben we verondersteld dat $a < b$. Deze beperking in de definitie kunnen we gemakkelijk verwijderen. Wanneer $a > b$ is, zullen, wanneer het interval van a naar b doorlopen wordt, de Δx_i negatief zijn. We kunnen dus de definitie (11.4) blijven gebruiken voor dit geval, alleen zullen nu de Δx_i negatief zijn. Dit leidt tot de volgende definitie:

Definitie 11.2

Als $a > b$, dan is

$$(11.5) \quad \int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx .$$

Definitie 11.3

$$(11.6) \quad \int_a^a f(x) \, dx = 0 .$$

De volgende stellingen, die we hier niet zullen bewijzen, zijn met behulp van de definitie van het integraalbegrip gemakkelijk te doorzien.

Stelling 11.1

Als $f(x)$ integreerbaar is op $a \leq x \leq b$ en c is een getal tussen a en b , dan geldt

$$(11.7) \quad \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx .$$

Stelling 11.2

Als $f(x)$ integreerbaar is op $a \leq x \leq b$ en c een constante is, dan geldt

$$(11.8) \quad \int_a^b cf(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx .$$

Stelling 11.3

Als $f(x)$ en $g(x)$ integreerbaar zijn op $a \leq x \leq b$, dan geldt

$$(11.9) \quad \int_a^b \{f(x)+g(x)\} \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx .$$

Opmerking

We hebben de bepaalde integraal geschreven in de vorm $\int_a^b f(x) \, dx$. De wijze waarop de integratievariabele wordt aangegeven heeft echter geen enkele betekenis. In plaats van de letter x voor de integratievariabele hadden we een willekeurige andere letter kunnen schrijven, bijv.

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt .$$

Functies van de bovenste grens.

De waarde van de bepaalde integraal van een functie $f(t)$ is in het algemeen afhankelijk van de keuze van de integratiegrenzen a en b .

In het vervolg zullen we aannemen dat de onderste integratiegrens a vast gekozen is en zullen we de integraal beschouwen als een functie van de bovenste integratiegrens b . We schrijven x in plaats van b (om het variabele karakter van de bovenste integratiegrens beter tot uitdrukking te brengen) en we definiëren $F(x)$ door

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt .$$

Definitie 11.4

$F(x)$ is een functie van de bovenste grens behorende bij de functie $f(t)$.

Het spreekt vanzelf dat er bij $f(t)$ oneindig veel functies van de bovenste grens behoren. We behoeven slechts voor a een andere waarde te kiezen om een andere functie van de bovenste grens te krijgen.

Stelling 11.4

Het verschil tussen twee functies van de bovenste grens, behorende bij dezelfde functie $f(t)$, is een constante.

Bewijs:

We stellen de twee functies van de bovenste grens voor door

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt \quad \text{en} \quad G(x) = \int_b^x f(t) \, dt .$$

Dan geldt (zie stelling 11.1)

$$\begin{aligned} F(x) - G(x) &= \int_a^x f(t) \, dt - \int_b^x f(t) \, dt = \\ &= \int_a^x f(t) \, dt + \int_x^b f(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt . \end{aligned}$$

De waarde van deze integraal is onafhankelijk van x en dus constant.

De afgeleide van de functie van de bovenste grens.

Stelling 11.5 (Hoofdstelling van de integraalrekening)

Als de functie $f(t)$ continu is op het interval $a \leq t \leq b$, dan is de functie

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt \quad (a \text{ constant})$$

differentieerbaar op hetzelfde interval en bovendien geldt

$$(11.10) \quad \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \, dt = f(x) .$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} F(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt .\end{aligned}$$

Stel dat $f(x)$ in het interval $[x, x+h]$ de grootste waarde ^{*)} bereikt in x_0 en de kleinste waarde in x_1 , dan geldt de volgende ongelijkheid voor $h > 0$:

$$hf(x_0) \geq \int_x^{x+h} f(t) dt \geq hf(x_1) .$$

Laten we nu h tot nul naderen dan zullen, wegens de continuïteit van de functie $f(x)$, $f(x_0)$ en $f(x_1)$ tot $f(x)$ naderen. Wij vinden dus

$$f(x_0) \geq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \geq f(x_1)$$

en

$$f(x) \geq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \geq f(x) .$$

Hieruit volgt

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt . \quad \text{q.e.d.}$$

Aangezien

$$\int_a^x f(t) dt = - \int_x^a f(t) dt \quad (\text{verg. (11.5)}),$$

volgt hieruit nu onmiddellijk

$$(11.11) \quad \frac{d}{dx} \int_x^a f(t) dt = - f(x) .$$

^{*)} Een continue functie op een gesloten interval neemt op dit interval een grootste en een kleinste waarde aan.

De hoofdstelling van de integraalrekening geeft dus de oplossing van het volgende omkeerprobleem: gegeven een continue functie $f(x)$, bepaal dan een functie $F(x)$, zodanig dat $F'(x) = f(x)$.

Elke functie $F(x)$, zodanig dat $F'(x) = f(x)$, wordt een primitieve functie of stamfunctie van $f(x)$ genoemd. We weten reeds dat elke functie van de bovenste grens, behorende bij $f(x)$, een primitieve functie van $f(x)$ is (stelling 11.4 en 11.5). Men kan verder gemakkelijk bewijzen dat het verschil van twee primitieve functies $F_1(x)$ en $F_2(x)$ van dezelfde functie $f(x)$ een constante functie is, zodat de volgende stelling geldt:

Stelling 11.6

Wanneer $F(x)$ een primitieve functie van $f(x)$ voorstelt, dan kan elke primitieve functie van $f(x)$ geschreven worden als

$$F(x) + C ,$$

waarbij C een willekeurige constante is.

Dus geldt ook

$$(11.12) \quad \int_a^x f(t) \, dt = F(x) + C.$$

(Hierbij is C een nog onbekende constante!).

Berekening van bepaalde integralen kan nu geschieden met behulp van primitieve functies. Als $F(x)$ een primitieve functie van $f(x)$ is, dan volgt uit (11.12)

$$\int_a^x f(t) \, dt = F(x) + C ,$$

waarbij C een nog onbekende constante is. De substitutie $x = a$ geeft

$$\int_a^a f(t) \, dt = F(a) + C = 0$$

en dus is $C = -F(a)$. Hiermede is nu de bepaalde integraal berekend ; m.a.w. we hebben de functie van de bovenste grens uitgedrukt in een

primitieve functie door middel van de relatie

$$(11.13) \quad \int_a^x f(t) \, dt = F(x) - F(a) .$$

Stelling 11.7

De bepaalde integraal van een continue functie $f(x)$ over een interval $[a, b]$ is gelijk aan de toename van een primitieve functie van $f(x)$ over dat interval.

De toename van een primitieve functie over het interval $[a, b]$, $F(b) - F(a)$, wordt vaak aangegeven met $F(x) \Big|_a^b$.

De onbepaalde integraal.

Definitie 11.5

De verzameling van alle stamfuncties van $f(x)$ wordt aangeduid met het symbool

$$\int f(x) \, dx .$$

Men noemt dit symbool een onbepaalde integraal.

Een onbepaalde integraal stelt dus niet een "onbepaalde stamfunctie" voor, maar een verzameling functies.

Voorbeeld 11.1

$$\int (2x+2) \, dx = x^2 + 2x + C ,$$

waarbij C alle reële getallen doorloopt. $C = 0$ geeft de stamfunctie $x(x+2)$; $C = 1$ geeft de stamfunctie $(x+1)^2$, etc. De mening dat er één speciale stamfunctie zou zijn, die de voorkeur heeft boven alle andere, berust op een misverstand!

Voorbeeld 11.2

$$\text{Voor } n \neq -1 \text{ is } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Men verifieert de uitkomsten door de rechterleden te differentiëren.

De substitutiemethode.

Met de kettingregel (9.17) correspondeert de zg. substitutiemethode van de integraalrekening.

Zij $f(x)$ een continue functie op $a \leq x \leq b$ met de stamfunctie $F(x)$. De functie $\phi(u)$ zij op het interval $\alpha \leq u \leq \beta$ differentieerbaar met de continue afgeleide $\phi'(u)$. Verder zij voor alle waarden van u uit $\alpha \leq u \leq \beta$, $a \leq \phi(u) \leq b$. Onder deze voorwaarden heeft $F(\phi(u))$ op $\alpha \leq u \leq \beta$ de continue (en dus integreerbare) afgeleide $f(\phi(u)) \cdot \phi'(u)$ en dus kunnen we schrijven

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(u)) \cdot \phi'(u) du &= F(\phi(u)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = \\ &= F(x) \Big|_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x) dx . \end{aligned}$$

Resumerend:

$$(11.14) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(u)) \cdot \phi'(u) du = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x) dx .$$

Voorbeeld 11.3

$$\text{Bepaal } \int_{\alpha}^{\beta} u(u^2+1)^n du .$$

Oplossing:

Stel $f(x) = x^n$ en $\phi(u) = u^2+1$. Voor de integrand kan dan geschreven worden

$$u(u^2+1)^n = \frac{1}{2}(u^2+1)^n \cdot 2u = \frac{1}{2} f(\phi(u)) \cdot \phi'(u) .$$

Dus

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} u(u^2+1)^n du &= \frac{1}{2} \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{\alpha^2+1}^{\beta^2+1} x^n dx = \\ &= \frac{1}{2(n+1)} x^{n+1} \Big|_{\alpha^2+1}^{\beta^2+1} = \frac{(\beta^2+1)^{n+1} - (\alpha^2+1)^{n+1}}{2(n+1)} . \end{aligned}$$

De substitutieregels in een andere vorm.

De functie $f(x)$ zij continu op $a \leq x \leq b$ met de stamfunctie $F(x)$. De functie $\phi(u)$ zij op $\alpha \leq u \leq \beta$ differentieerbaar met de continue afgeleide $\phi'(u)$, terwijl $\phi(\alpha) = a$ en $\phi(\beta) = b$. Verder zij $\phi(u)$ omkeerbaar op $\alpha \leq u \leq \beta$, met als omkeersfunctie $\psi(t)$ op het interval $a = \phi(\alpha) \leq t \leq \phi(\beta) = b$ *).

De functie $F(\phi(u))$ heeft nu op $\alpha = \psi(a) \leq u \leq \psi(b) = \beta$ de afgeleide

$$\frac{dF(\phi(u))}{du} = f(\phi(u)) \cdot \phi'(u) .$$

Dus

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(u)) \cdot \phi'(u) du &= \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\phi(u)) \cdot \phi'(u) du = \\ &= F(\phi(u)) \Big|_{\psi(a)}^{\psi(b)} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx . \end{aligned}$$

Resumerend:

$$(11.15) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\phi(u)) \cdot \phi'(u) du .$$

De logaritmische functie $\log t$.

De functie $f(x) = \frac{1}{x}$ is op $x > 0$ continu en dus op het vak $[1, t]$, met $t > 0$, integreerbaar.

We stellen nu per definitie

$$(11.16) \quad \log t = \int_1^t \frac{1}{x} dx \quad \text{op } t > 0 .$$

*) Uit de gegevens volgt dat $\phi(u)$ monotoon stijgend is.

Omdat $\log t$ een functie van de bovenste grens van een continue functie is, geldt

$$(11.17) \quad \frac{d \log t}{dt} = \frac{1}{t} \quad \text{op } t > 0.$$

Hieruit volgt meteen al dat $\log t$ op $t > 0$ monotoon stijgend is.

Dus, daar $\log 1 = \int_1^1 \frac{dx}{x} = 0$, is

$$(11.18) \quad \begin{cases} \log t < 0 & \text{op } 0 < t < 1 \\ \log t > 0 & \text{op } t > 1. \end{cases} \quad \text{en}$$

Stellen we $\phi(t) = \log at$ ($a > 0$) op $t > 0$, dan vinden we voor de afgeleide van $\phi(t)$

$$\phi'(t) = \frac{1}{at} \cdot a = \frac{1}{t}.$$

De functies $\phi(t)$ en $\log t$ hebben dus dezelfde afgeleide en verschillen derhalve een constante. Stellen we $\phi(t) = \log t + C$, dan levert de substitutie $t = 1$

$$C = \phi(1) - \log 1 = \log a.$$

Voor $a > 0$ en $t > 0$ geldt dus

$$(11.19) \quad \log at = \log a + \log t.$$

Hieruit volgt:

$$\log a^n = n \log a$$

als $a > 0$ en n een natuurlijk getal is. Is a weer een positieve constante dan is

$$\left(\frac{1}{a^n}\right)^n = a$$

en dus

$$\log a = n \log a^{\frac{1}{n}}$$

of

$$\log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log a \quad (n \text{ geheel en positief}).$$

Zij $r = \frac{p}{q}$ met p en q natuurlijke getallen, dan is

$$\log a^r = \log a^{\frac{p}{q}} = \log \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = p \log a^{\frac{1}{q}} = \frac{p}{q} \log a = r \log a.$$

Voor alle positieve rationale getallen $r > 0$ geldt dus

$$\log a^r = r \log a .$$

Zij $x > 0$, dan is

$$0 = \log 1 = \log \left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \log x + \log \frac{1}{x}$$

of
$$\log \frac{1}{x} = - \log x$$

of
$$\log x^{-1} = (-1) \log x .$$

Zij r nu een rationaal getal < 0 . Stellen we $r = -s$ met $s > 0$, dan is

$$\log a^r = \log a^{-s} = \log \frac{1}{a^s} = - \log a^s = -s \log a = r \log a .$$

Voor alle rationale getallen r geldt dus

$$(11.20) \quad \log a^r = r \log a .$$

Zij α nu een irrationaal getal en r_n een rij rationale getallen met limiet α . Bedenken we dat $\log t$ continu is, dan kunnen we schrijven

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a^{r_n} = \log a^\alpha \quad (a > 0) .$$

Ook geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \cdot \log a = \alpha \log a .$$

Dus

$$(11.21) \quad \log a^\alpha = \alpha \log a$$

voor elke reële α .

Beschouwen we verder de functie

$$\phi(x) = \log E(x) .$$

Voor $\phi'(x)$ vinden we volgens de kettingregel

$$\phi'(x) = \frac{1}{E(x)} \cdot E'(x) = \frac{1}{E(x)} \cdot E(x) = 1 .$$

De afgeleide van $f(x) = x$ is ook gelijk aan 1, waaruit volgt dat

$$\phi(x) = x + C \quad (C \text{ constant}) .$$

Daar $\phi(0) = \log E(0) = \log 1 = 0$, vinden we $C = 0$, dus $\log E(x) = x$ voor alle x of

$$(11.22) \quad \log E^x = x \log E = x .$$

Hieruit volgt weer

$$(11.23) \quad \log E = 1 .$$

Hierna tonen we aan dat de constante $E = E(1)$ gelijk is aan de reeds in paragraaf 8 ingevoerde constante e . We definieerden

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ,$$

waaruit wegens de continuïteit van $\log t$ volgt

$$\begin{aligned} \log e &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \log 1}{\frac{1}{n}} = \left. \frac{d \log t}{dt} \right|_{t=1} = \frac{1}{1} = 1 . \end{aligned}$$

Dus

$$\log E = 1 \quad \text{en} \quad \log e = 1 .$$

Omdat $\log t$ een monotoon stijgende functie is, moet wel gelden

$$(11.24) \quad e = E .$$

Beschouwen we tenslotte de functie

$$\psi(t) = \frac{t}{E(\log t)} \quad \text{op } t > 0 .$$

Voor $\psi'(t)$ geldt nu

$$\psi'(t) = \frac{E(\log t) \cdot 1 - t \cdot E'(\log t) \cdot \frac{1}{t}}{E^2(\log t)} = 0 ,$$

dus is $\psi(t)$ op $t > 0$ een constante functie.

$$\psi(t) = \psi(1) = \frac{1}{E(\log 1)} = \frac{1}{E(0)} = 1 \quad \text{op } t > 0$$

of

$$(11.25) \quad E(\log t) = t \quad \text{op } t > 0.$$

Uit het een en ander volgt dat $E(x)$ en $\log t$ elkaars omkeersfuncties zijn.

Lossen we nu de vergelijking

$$E(x) = e^x = b \quad (b > 0)$$

op, dan is

$$\log e^x = \log b$$

of

$$x \log e = \log b$$

of

$$x = \log b.$$

Volgens de schoolalgebra is de oplossing van $e^x = b$ per definitie gelijk aan $e^{\log b}$, waarmee het verband

$$(11.26) \quad \log t = e^{\log t} \quad (t > 0),$$

gelegd is tussen de bekende logarithme en de functie $\log t$.

Voorbeeld 11.4

Bepaal voor $x > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$.

Oplossing:

$$n(\sqrt[n]{x} - 1) = \frac{e^{\frac{1}{n} \log x} - e^0}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n} \log x} - e^0}{\frac{1}{n} \log x} \cdot \log x,$$

dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \left. \frac{de^x}{dx} \right|_{x=0} \cdot \log x = e^0 \cdot \log x = \log x.$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de zeer belangrijke limiet

$$(11.27) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - e^0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \left. \frac{de^x}{dx} \right|_{x=0} = e^0 = 1.$$

Voorbeeld 11.5

Bepaal $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Oplossing:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = E\left(\log \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) = E\left(n \log \left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = E\left(\frac{\log \left(1 + \frac{x}{n}\right) - \log 1}{\frac{x}{n}} \cdot x\right).$$

Wegens

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{x}{n}\right) - \log 1}{\frac{x}{n}} = \left. \frac{d \log x}{dx} \right|_{x=1} = 1,$$

vinden we

$$(11.28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = E(1 \cdot x) = E(x) = e^x.$$

Voorbeeld 11.6Bepaal de afgeleide van $f(x) = x^\alpha$ op $x > 0$.Oplossing:

$$f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \log x}.$$

Volgens de kettingregel geldt dus

$$f'(x) = e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

Hiermee is dus aangetoond dat ook voor irrationale getallen α geldt

$$(11.29) \quad \frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

Partiële integratie.

De regel voor de differentiatie van een produkt van twee differentieerbare functies luidt

$$\{f(x)g(x)\}' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) .$$

Zijn alle in deze formule voorkomende functies nu integreerbaar, dan geldt

$$f(x)g(x) \Big|_a^b = \int_a^b f(x)g'(x) dx + \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

of

$$(11.30) \quad \int_a^b f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx .$$

Dit is de formule voor partiële integratie.

Partiële integratie maakt het dikwijls mogelijk integraties te vereenvoudigen. Moet men een functie $h(x)$ integreren, dan tracht men $h(x)$ te schrijven in de vorm $h(x) = f(x)g'(x)$, zodanig dat de functie $f'(x)g(x)$ eenvoudiger te integreren is dan de oorspronkelijke functie.

Voorbeeld 11.7

$$\begin{aligned} \underline{a.} \quad \int_{\epsilon}^1 \log x \, dx &= \int_{\epsilon}^1 1 \cdot \log x \, dx = x \log x \Big|_{\epsilon}^1 - \int_{\epsilon}^1 x \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= -\epsilon \log \epsilon - (1 - \epsilon) = -\epsilon \log \epsilon + \epsilon - 1. \end{aligned}$$

$$\underline{b.} \quad \int_0^a x e^x \, dx = x e^x \Big|_0^a - \int_0^a e^x \, dx = a e^a - (e^a - e^0) = a e^a - e^a + 1.$$

$$\underline{c.} \quad \int_1^e \frac{\log x}{x} \, dx = \log^2 x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{\log x}{x} \, dx \quad \text{of}$$

$$\int_1^e \frac{\log x}{x} \, dx = \frac{1}{2}(\log^2 e - \log^2 1) = \frac{1}{2} .$$

Oneigenlijke integralen.

Tot nu toe hebben wij alleen functies besproken die op een eindig interval begrensd waren en ook de integratie beperkt tot eindige intervallen.

Het is echter mogelijk ook in andere gevallen onder bepaalde voorwaarden integralen te definiëren. Hiervan behandelen we eerst integralen over eindige intervallen van functies die op die intervallen niet begrensd zijn.

Een dergelijke functie is bijv.

$$f(x) = \log x \quad \text{op het vak } 0 < x \leq 1.$$

In dit geval geldt nl. $\log 2^{-n} = -n \log 2$, en daar $\log 2 > \log 1 = 0$, is $\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty$; m.a.w. $\log x$ is op $0 < x \leq 1$ niet begrensd.

Definitie 11.6

Wanneer de functie $f(x)$ continu is op $a < x \leq b$ en $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, dan definieert men de integraal van $f(x)$ over het interval $[a, b]$ door:

$$(11.31) \quad \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) \, dx \quad \text{met } \epsilon > 0,$$

mits deze limiet bestaat.

Voorbeeld 11.8

We veronderstellen $\alpha \neq -1$, dan geldt

$$(11.32) \quad \int_{\epsilon}^1 x^{\alpha} \, dx = \frac{1}{\alpha+1} (1 - \epsilon^{\alpha+1}).$$

We onderscheiden nu de volgende mogelijkheden:

1. $\alpha > -1$.

Voor $\epsilon \rightarrow 0$ convergeert het rechterlid naar $\frac{1}{1+\alpha}$, dus de bepaalde integraal van x^{α} over het interval $[0, 1]$ bestaat en is gelijk aan $\frac{1}{1+\alpha}$.

2. $\alpha < -1$.

Voor $\epsilon \rightarrow 0$ divergeert het rechterlid naar oneindig en de integraal van x^{α} over het interval $[0, 1]$ bestaat niet.

3. $\alpha = -1$.

$$(11.33) \quad \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \log 1 - \log \epsilon = -\log \epsilon.$$

Voor $\epsilon \rightarrow 0$ divergeert (11.33) en de integraal bestaat dus niet.

Samenvattend kan men dus zeggen, dat x^{α} integreerbaar is over het interval $[0,1]$ voor $\alpha > -1$.

Voorbeeld 11.9

Volgens voorbeeld 11.7 geldt

$$\int_{\epsilon}^1 \log x dx = -\epsilon \log \epsilon + \epsilon - 1.$$

Nu is

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-\epsilon \log \epsilon) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \frac{1}{\epsilon}}{\frac{1}{\epsilon}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\log e^u}{e^u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{e^u} = 0 \quad *) \end{aligned}$$

Dus

$$\int_0^1 \log x dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \log x dx = -1.$$

Een tweede type oneigenlijke integralen ontstaat, wanneer de lengte van het interval waarover geïntegreerd wordt, willekeurig groot wordt.

Definitie 11.7

Wanneer de integraal van de functie $f(x)$ over het interval $[a, R]$ bestaat voor $R > a$ en eveneens de limiet hiervan voor $R \rightarrow \infty$, dan definieert men de integraal van $f(x)$ van a tot ∞ door

$$(11.34) \quad \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx.$$

*) $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots > \frac{u^2}{2}$ voor $u > 0$, waaruit volgt $0 < \frac{u}{e^u} < \frac{2}{u}$.

$$\text{Dus } \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{e^u} = 0.$$

Voorbeeld 11.10

We onderzoeken weer de integraal van x^α , $\alpha \neq -1$ onderstellende.
Volgens de definitie is

$$(11.35) \quad \int_1^\infty x^\alpha dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R x^\alpha dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha+1} (R^{\alpha+1} - 1) .$$

De limiet in het rechterlid bestaat voor $\alpha < -1$ en dus ook de integraal in het linkerlid. Voor $\alpha > -1$ divergeert het rechterlid en de integraal in het linkerlid bestaat dus niet. Tenslotte divergeert ook de integraal

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \log R .$$

Samenvattend kunnen we dus zeggen: de functie x^α is integreerbaar over het interval $[1, \infty)$ voor $\alpha < -1$. Voor $\alpha \geq -1$ bestaat de oneigenlijke integraal van de functie x^α over het interval $[1, \infty)$ niet.

Evenals bij eigenlijke integralen dient men ook hier steeds na te gaan of de betreffende integralen bestaan. Wij gaan hier echter niet verder op in en beperken ons tot het geven van twee belangrijke oneigenlijke integralen (waarvan de existentie kan worden aangetoond), die wij o.a. in deel 2 zullen gebruiken.

Voorbeeld 11.11

De gamma-functie wordt als volgt gedefinieerd:

$$(11.36) \quad \Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} \cdot e^{-x} dx , \quad p > 0 .$$

Door partiële integratie van (11.36) vindt men

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} \cdot e^{-x} dx = -x^{p-1} \cdot e^{-x} \Big|_0^\infty + (p-1) \int_0^\infty x^{p-2} \cdot e^{-x} dx$$

of

$$(11.37) \quad \Gamma(p) = (p-1) \cdot \Gamma(p-1) .$$

Zet men de partiële integratie voort voor $\Gamma(p-1)$, $\Gamma(p-2)$, etc., dan vindt men

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)\dots(p-k) \int_0^{\infty} x^{p-k-1} \cdot e^{-x} dx .$$

De partiële integratie kan men hierbij voortzetten zolang $p-k > 0$ is.

In het bijzonder vindt men voor gehele waarden van p

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)\dots 3.2.1 \int_0^{\infty} e^{-x} dx ,$$

en aangezien

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1 ,$$

volgt hieruit dus

$$(11.38) \quad \Gamma(p) = (p-1)! .$$

Voorbeeld 11.12

Een oneigenlijke integraal die in de statistiek een belangrijke plaats inneemt, is

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx .$$

Men kan op dezelfde wijze als $\int_0^{\infty} f(x) dx$ de integraal $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ definiëren

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 f(x) dx .$$

Men kan bewijzen dat

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx .$$

Verder kan men aantonen dat

$$(11.39) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} .$$

De functie

$$(11.40) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

staat in de statistiek bekend als de verdelingsfunctie van de normale verdeling.

12. Functies van meer dan één variabele.

In de toepassingen van de wiskunde kunnen we ons meestal niet beperken tot functies van één variabele, maar zijn we veelal gedwongen functies te beschouwen van meer dan één variabele. We zullen alleen functies van twee variabelen x en y behandelen. Uitbreiding tot meer dan twee variabelen kan op analoge wijze geschieden.

Vergelijkingen van de vorm $z = x^2 + y^2$, $z = x^5 y^3 + x^2$ e.d. geven een functioneel verband aan tussen een paar waarden (x, y) en een waarde z . We zeggen dat z een functie is van de variabelen x en y . De verzameling van waarden die het paar (x, y) kan aannemen wordt het definitiegebied van de functie $z = f(x, y)$ genoemd. In het vervolg zullen we ons vrijwel geheel beperken tot een rechthoekig definitiegebied:

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d.$$

Evenals bij functies van één variabele speelt ook bij functies van meer variabelen het begrip continuïteit een belangrijke rol.

Definitie 12.1

De functie $f(x, y)$, gedefinieerd op een gebied D , is continu in het punt (x_0, y_0) van D , als bij elke $\epsilon > 0$ een δ_1 en δ_2 gevonden kunnen worden zodanig dat

$$(12.1) \quad |f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)| < \epsilon,$$

zodra

$$|h| < \delta_1 \quad \text{en} \quad |k| < \delta_2.$$

Afgeleide van functies van twee variabelen.

Geven we in een functie van meerdere variabelen alle variabelen, met uitzondering van één, een vaste (numerieke) waarde, dan verkrijgen we een functie van één variabele. Zo wordt de functie $z = f(x, y)$ voor een vaste waarde y_0 van y een functie van x , waarvan wij op de in paragraaf 9 aangegeven wijze het differentiaalquotiënt (naar x) kunnen bepalen, bijv. in het punt $x = x_0$. Deze afgeleide is dan de limiet

$$(12.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} .$$

Definitie 12.2

Men noemt de limiet (12.2) de partiële afgeleide naar x van de functie $f(x, y)$ in het punt (x_0, y_0) en men schrijft

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \quad \text{of} \quad f'_x(x_0, y_0) .$$

Laten we x_0 en y_0 weer variëren, dan is de partiële afgeleide $f'_x(x, y)$ een functie van x en y . Uiteraard is het niet noodzakelijk dat de partiële afgeleide overal bestaat.

Op dezelfde wijze wordt nu de partiële afgeleide van $f(x, y)$ naar y gedefinieerd als

$$(12.3) \quad \begin{aligned} & \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = f'_y(x_0, y_0) = \\ & = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k} . \end{aligned}$$

We kunnen nu de hogere partiële afgeleiden van $f(x, y)$ verkrijgen door de partiële afgeleiden van de eerste orde $f'_x(x, y)$ en $f'_y(x, y)$ te differentiëren naar één van de variabelen. De volgorde van de differentiatie wordt door de volgorde van de indices of de symbolen ∂x en ∂y aangegeven, waarbij de laatst uitgevoerde operatie links wordt geplaatst, bijv.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] = f'''_{xyx} .$$

Men kan nu voor de "gemengde" afgeleiden van de tweede orde f''_{xy} en f''_{yx} bewijzen, dat als f''_{xy} en f''_{yx} continu zijn in een gebied D , overal binnen dat gebied D geldt

$$(12.4) \quad f''_{xy} = f''_{yx} .$$

Voorbeeld 12.1

We bepalen de eerste en enkele tweede afgeleiden van $z = f(x,y) = x^3 y e^{xy}$. Differentiëren we naar x en houden we y vast, dan kunnen we y als een constante beschouwen en de differentiatie uitvoeren met de regels voor de differentiatie van een functie van één variabele.

$$f'_x(x,y) = 3x^2 y e^{xy} + x^3 y^2 e^{xy} = (3+xy)x^2 y e^{xy},$$

$$f'_y(x,y) = x^3 e^{xy} + x^4 y e^{xy} = (1+xy)x^3 e^{xy},$$

$$f''_{yx}(x,y) = x^3 y e^{xy} + (3+xy)x^2 e^{xy} + (3+xy)x^3 y e^{xy} = x^2 (x^2 y^2 + 5xy + 3) e^{xy},$$

$$f''_{xy}(x,y) = x^3 y e^{xy} + 3(1+xy)x^2 e^{xy} + (1+xy)x^3 y e^{xy} = x^2 (x^2 y^2 + 5xy + 3) e^{xy}.$$

We zien dus inderdaad dat $f''_{yx} = f''_{xy}$; dit in overeenstemming met (12.4).

De kettingregel.

In veel gevallen is een functie van x en y gegeven in de vorm $z = f(u,v,...)$, waarin $u, v, ...$ functies zijn van x en y . Dus $u = u(x,y), v = v(x,y), ...$.

We zeggen dan dat $z = f(u,v,...) = f(u(x,y), v(x,y), ...) = F(x,y)$ een samengestelde functie is.

Voorbeeld 12.2

De functie in voorbeeld 12.1 kunnen we schrijven in de vorm

$$z = x^3 y e^{xy} = u e^v$$

met

$$u = x^3 y \quad \text{en} \quad v = xy.$$

We zullen nu aannemen dat de functies $u(x,y), v(x,y), ...$ gedefinieerd zijn op een gebied G .

Met elk punt (x,y) uit G correspondeert dan een punt $(u,v,...)$ en de volgende onderstelling is nu, dat het punt $(u,v,...)$ weer in een gebied H ligt, waarop $f(u,v,...)$ gedefinieerd is.

Stelling 12.1

Als de functie $z = f(u,v,\dots)$ continu is in H en de functies $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, ... zijn continu in G , dan is de samengestelde functie $z = F(x,y)$ continu in G .

We beschouwen nu functies van het type $z = f(u,v,\dots)$, waarin $u,v,\dots$ alleen afhangen van de variabele x : $u = u(x)$, $v = v(x)$, ... Voor deze functies geldt de volgende stelling.

Stelling 12.2 (kettingregel)

Als de functie $z = f(u,v,\dots)$ in H continue partiële afgeleiden van de eerste orde heeft en de functies $u = u(x)$, $v = v(x)$, ... continue eerste afgeleiden hebben in het interval D : $a \leq x \leq b$, dan heeft $z = f(u,v,\dots) = F(x)$ een continue afgeleide in R en geldt

$$(12.5) \quad F'(x) = f'_u(u,v,\dots)u'(x) + f'_v(u,v,\dots)v'(x) + \dots$$

Gewone integralen als functie van een parameter.

Als $f(x,y)$ een continue functie van x en y is in een rechthoekig gebied $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, dan kunnen we, als we x een vaste waarde geven, de functie $f(x,y)$, welke nu een functie van één variabele y is, integreren over het interval $c \leq y \leq d$. We verkrijgen dan de uitdrukking

$$(12.6) \quad \int_c^d f(x,y) dy.$$

Deze uitdrukking is nog afhankelijk van de waarde die we aan x hebben toegekend. Anders gezegd: (12.6) is een functie van de parameter x .

Stelling 12.3

De integraal

$$(12.7) \quad F(x) = \int_c^d f(x,y) dy$$

is een continue functie van x op $a \leq x \leq b$, als $f(x,y)$ een continue functie is op $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$.

Stelling 12.4

Als voor $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ de functie $f(x,y)$ een continue afgeleide naar x bezit, mogen we voor $a \leq x \leq b$ de differentiatie van $F(x) = \int_c^d f(x,y) dy$ naar x onder het integraalteken uitvoeren ; d.w.z.

$$(12.8) \quad \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x,y) dy = \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy .$$

Tot nu toe hebben we het geval beschouwd dat de integratiegrenzen c en d onafhankelijk van x zijn. Stel nu dat we de uitdrukking

$$F(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y) dy$$

willen differentiëren, dan kan dit met behulp van de volgende stelling.

Stelling 12.5

Laten $\phi_1(x)$ en $\phi_2(x)$ continue afgeleiden naar x bezitten en laat $f(x,y)$ continu differentieerbaar zijn in het gehele gebied waar $f(x, \phi_1(x))$ en $f(x, \phi_2(x))$ bestaan, dan geldt

$$(12.9) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx} F(x) &= \frac{d}{dx} \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y) dy = \\ &= \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy + \phi_2'(x) f(x, \phi_2(x)) - \phi_1'(x) f(x, \phi_1(x)) . \end{aligned}$$

Bewijs:

We schrijven voor $F(x)$

$$(12.10) \quad F(x) = \int_u^v f(x,y) dy = G(x,u,v) ,$$

met

$$u = \phi_1(x) \quad \text{en} \quad v = \phi_2(x) .$$

Volgens de kettingregel (stelling 12.2) geldt nu

$$(12.11) \quad F'(x) = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

Passen wij op

$$\frac{\partial G}{\partial u} \quad \text{en} \quad \frac{\partial G}{\partial v}$$

de hoofdstelling van de integraalrekening toe (vgl. paragraaf 11), dan vinden we

$$\frac{\partial G}{\partial u} = -f(x, u) \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial G}{\partial v} = f(x, v).$$

Dit, samen met stelling 12.4, leidt tot

$$F'(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy - \phi_1'(x) f(x, \phi_1(x)) + \phi_2'(x) f(x, \phi_2(x)).$$

Voorbeeld 12.3

Gevraagd de afgeleide naar x te bepalen van $\int_x^{3x+5} x^2 y dy$.

Toepassing van (12.9) geeft

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_x^{3x+5} x^2 y dy &= \int_x^{3x+5} 2xy dy + 3x^2(3x+5) - x^3 = \\ &= x\{(3x+5)^2 - x^2\} + 3x^2(3x+5) - x^3 = 16x^3 + 45x^2 + 25x. \end{aligned}$$

Dubbelintegralen.

De functie $f(x, y)$ zij gedefinieerd op de rechthoek R , bepaald door $a \leq x \leq b$ en $c \leq y \leq d$ (zie figuur 12.1).

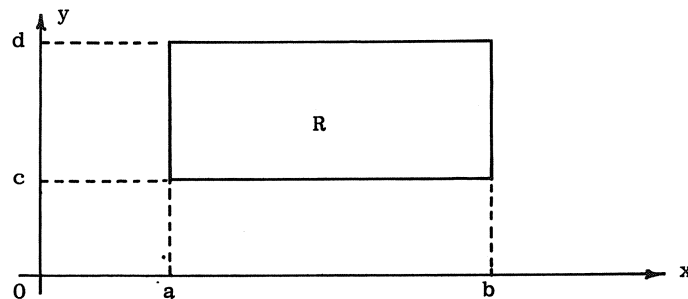


fig. 12.1

Door een onderverdeling te maken van de intervallen $a \leq x \leq b$ en $c \leq y \leq d$, ontstaat eveneens een onderverdeling van R in deelrechten (zie figuur 12.2).

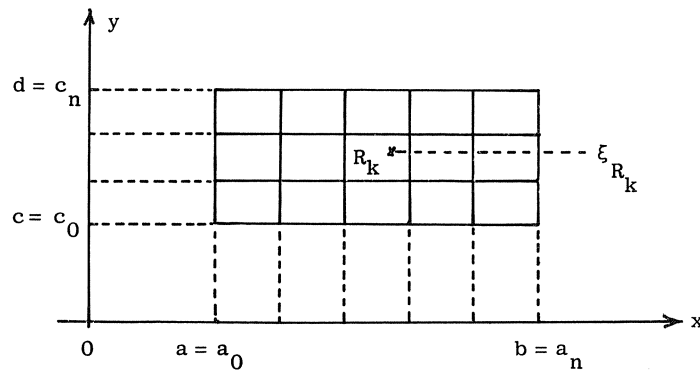


fig. 12.2

De rechthoek R wordt dus d.m.v. verticale en horizontale lijnen in een aantal deelrechthoeken verdeeld. Bij deze onderverdeling van R maken we een som

$$S = \sum_k R_k \cdot f(\xi_{R_k}) ,$$

waarbij R_k de oppervlakte van een deelvakje van R en ξ_{R_k} een willekeurig punt (x,y) in dit deelvakje voorstelt.

Onder de grofheid van de onderverdeling van R verstaan we de grootste van de grofheden van de onderverdelingen van het x - en het y -interval.

Bij voortdurende verfijning van de onderverdeling van R , zodanig dat de grofheid van de onderverdeling tot nul nadert, zal, in het geval dat $f(x,y)$ continu is op R , de som

$$S = \sum_k R_k \cdot f(\xi_{R_k})$$

een limiet L hebben. Deze limiet schrijven we als

$$L = \iint_R f(x,y) \, dx \, dy ,$$

en we noemen deze limiet de dubbelintegraal van $f(x,y)$ over de rechthoek R .

Berekening van dubbelintegralen.Stelling 12.6

Als $f(x,y)$ continu is op de rechthoek R , dan geldt

$$(12.12) \quad \int \int_R f(x,y) \, dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) \, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y) \, dx .$$

Dit houdt dus ook in dat bij herhaalde integratie van een continue functie met vaste integratiegrenzen, de integratievolgorde mag worden verwisseld. Ook kan men zeggen dat er in zo'n geval "onder het integraalteken" geïntegreerd mag worden.

In paragraaf 11 hebben we gezien dat de enkelvoudige integraal betrekking heeft op een oppervlak. Op gelijksoortige wijze is gemakkelijk in te zien dat een dubbelintegraal kan worden geïnterpreteerd als een inhoud.

Dubbelintegralen over een normaal gebied.

Onder een normaal gebied verstaan we een gebied in het x,y -vlak dat begrensd wordt door twee vertikalen $x = a$ en $x = b$ en twee continue krommen (functies) $\phi(x)$ en $\psi(x)$, zodanig dat steeds geldt: $\phi(x) \leq \psi(x)$ (zie figuur 12.3).

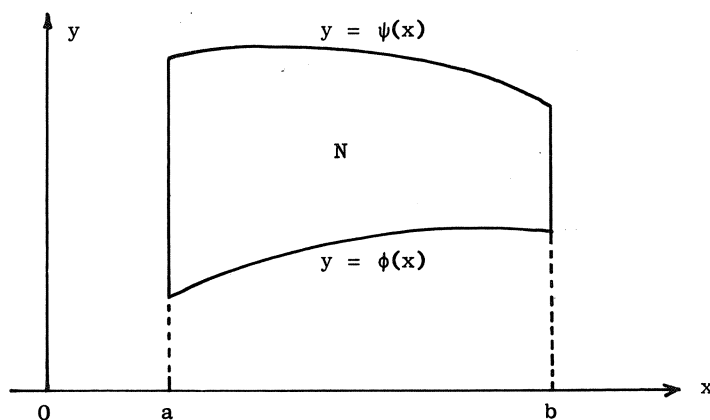


fig. 12.3

De inhoud van het lichaam, gevormd door het vlak $z = f(x,y)$, het x,y -vlak en de verticale cylinder door de omtrek van het normaalgebied N , kan nu berekend worden met behulp van de formule

$$(12.13) \quad I = \iint_N f(x,y) \, dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) \, dy .$$

Hierbij moet men wel bedenken dat het gedeelte van de bedoelde inhoud dat onder het x,y -vlak ligt, gerekend wordt negatief te zijn.

Formule (12.12) wordt nu een bijzonder geval van (12.13) door voor de functies $\phi(x)$ en $\psi(x)$ resp. de constante functies $\phi(x) = c$ en $\psi(x) = d$ te nemen.

Voorbeeld 12.4

Als $f(x,y)$ op het gehele normaalgebied gelijk is aan 1, dan moet

$$\iint_N f(x,y) \, dx dy$$

gelijk zijn aan de oppervlakte van het normaalgebied. Dit blijkt ook uit (12.13), want

$$\begin{aligned} \iint_N f(x,y) \, dx dy &= \iint_N 1 \, dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} dy = \\ &= \int_a^b \{ \psi(x) - \phi(x) \} \, dx = \int_a^b \psi(x) \, dx - \int_a^b \phi(x) \, dx = \\ &= \text{oppervlakte van } N. \end{aligned}$$

Voorbeeld 12.5

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt[3]{x}}} xy^2 \, dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt[3]{x}} xy^2 \, dy = \int_0^1 x \left(\frac{1}{3} y^3 \right) dx = \frac{1}{9} . \end{aligned}$$

Evenals bij enkelvoudige integralen kan het bij dubbelintegralen voorkomen dat het gebied waarover geïntegreerd moet worden niet begrensd is. Deze omstandigheid leidt tot het invoeren van oneigenlijke dubbel-

integralen. Deze worden steeds gedefinieerd met behulp van het limietbegrip en dus moeten we in principe hierbij steeds aantonen dat deze limieten (van dubbelintegralen over eindige gebieden, de zg. eigenlijke dubbelintegralen) bestaan. De theorie van dit onderwerp, die we hier niet zullen behandelen, verloopt analoog aan die van de enkelvoudige oneigenlijke integralen.

Ter toelichting geven we hier een aantal voorbeelden, waarbij we steeds zullen veronderstellen dat de oneigenlijke integralen bestaan.

Voorbeeld 12.6

$f(x,y)$ zij gedefinieerd op het eerste kwadrant van het x,y -vlak (zie figuur 12.4).

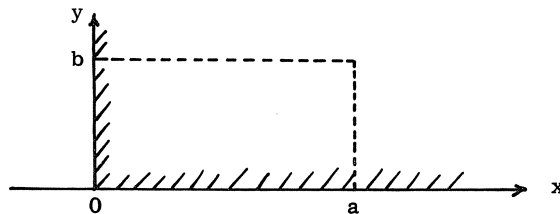


fig. 12.4

De dubbelintegraal van $f(x,y)$ over deze (niet begrensde) rechthoek is

$$\lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_0^a dx \int_0^b f(x,y) dy .$$

In het geval dat deze limiet bestaat, blijkt deze gelijk te zijn aan

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(x,y) dy .$$

Voorbeeld 12.7

$f(x,y)$ is gedefinieerd op het gebied $a \leq x \leq b$, $y \leq \psi(x)$, (zie figuur 12.5).

De dubbelintegraal van $f(x,y)$ over dit (niet begrensde) normaalgebied is

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} \int_a^b dx \int_c^{\psi(x)} f(x,y) dy = \int_a^b dx \int_{-\infty}^{\psi(x)} f(x,y) dy .$$

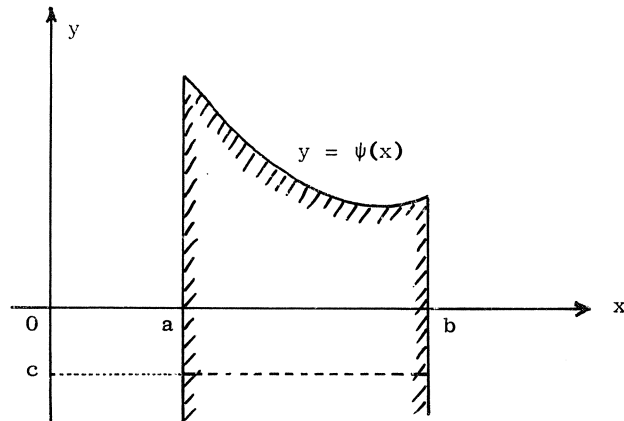


fig. 12.5

Voorbeeld 12.8

De functie $f(x,y)$ zij gedefinieerd op het gebied $x+y \leq c$, (zie figuur 12.6).

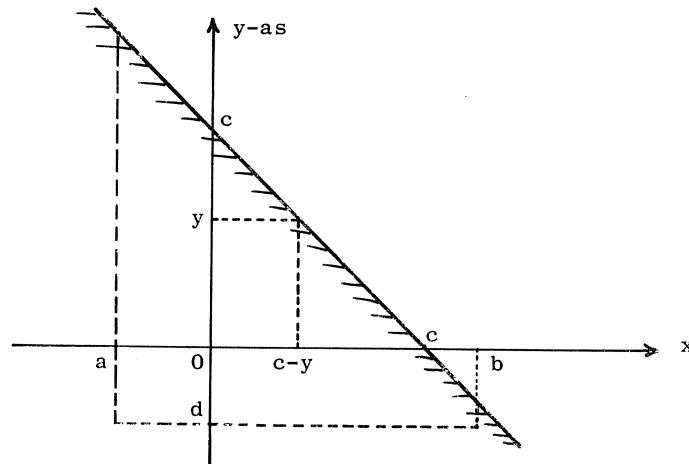


fig. 12.6

De dubbelintegraal van $f(x,y)$ over dit normaalgebied is

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty \\ d \rightarrow -\infty}} \int_a^b dx \int_d^{-x+c} f(x,y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{-x+c} f(x,y) dy .$$

Hierbij willen we nog opmerken dat het bij dubbelintegralen over normaalgebieden soms (zoals o.a. in dit geval) mogelijk is de integratievolgorde te verwisselen. Voorgaande dubbelintegraal kan nl. ook geschreven worden als

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{c-y} f(x,y) dx ,$$

zoals blijkt wanneer we eerst in de x-richting integreren met als uitkomst

$$\int_{-\infty}^{c-y} f(x,y) dx$$

en deze functie van y vervolgens integreren van $-\infty$ naar $+\infty$ langs de y-as.

Opgave

Tracht op soortgelijke wijze aan te tonen dat

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{e^x}^{+\infty} f(x,y) dy = \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{\log y} f(x,y) dx . \\ \text{b.} \quad & \int_0^a dx \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{a^2}{x}} f(x,y) dy = \int_0^{\frac{a^2}{2}} dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y) dx . \end{aligned}$$

Maxima en minima bij functies van twee variabelen.

De functie $z = f(x,y)$ heeft een relatief maximum in het punt (x_0, y_0) wanneer alle waarden van z in een omgeving van dat punt kleiner zijn dan $f(x_0, y_0)$. Dus (x_0, y_0) is een relatief maximum van $f(x,y)$ als er een δ bestaat, zodanig dat voor alle (x,y) met $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta$ geldt $f(x,y) < f(x_0, y_0)$. Op overeenkomstige wijze wordt een relatief minimum gedefinieerd.

We zullen eerst noodzakelijke voorwaarden geven voor de aanwezigheid van een extreme waarde.

Stel (x_0, y_0) is een extreem punt. De functie $f(x, y_0)$ bezit dan als functie van één variabele een extreem punt voor $x = x_0$, zodat noodzakelijk is de voorwaarde

$$\left. \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial x} \right|_{x_0} = f'_x(x_0, y_0) = 0 .$$

Evenzo is noodzakelijk de voorwaarde

$$f'_y(x_0, y_0) = 0 .$$

De mogelijke extreme punten zijn de gemeenschappelijke oplossingen van de vergelijkingen

$$(12.14) \quad f'_x(x, y) = 0$$

en

$$(12.15) \quad f'_y(x, y) = 0 .$$

Een oplossing van (12.14) en (12.15) is echter niet noodzakelijk een extreem punt, hetgeen men bijv. kan zien aan de functie $z = xy$, waarvoor deze vergelijkingen het punt $(0,0)$ als oplossing bezitten. In het punt $(0,0)$ bezit deze functie de waarde nul, terwijl in iedere omgeving van $(0,0)$, hoe klein ook genomen, de functie zowel positieve als negatieve waarden bezit; $(0,0)$ kan dus geen extreem zijn. Wij moeten derhalve meer eisen, hetgeen in de volgende stelling tot uitdrukking komt.

Stelling 12.7a

De functie $f(x, y)$ bezit een relatief minimum in (x_0, y_0) , wanneer $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ en bovendien

$$(12.16) \quad \begin{aligned} & f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \{f''_{xy}(x_0, y_0)\}^2 > 0 \\ \text{en} \quad & f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 . \end{aligned}$$

De functie $f(x, y)$ bezit een relatief maximum in (x_0, y_0) , wanneer $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ en bovendien

$$(12.17) \quad \begin{aligned} & f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \{f''_{xy}(x_0, y_0)\}^2 > 0 \\ \text{en} \quad & f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 . \end{aligned}$$

Maxima en minima met bijvoorwaarden.

In vele problemen komt het voor, dat men een uiterste waarde van een functie $f(x,y)$ moet bepalen, waarbij x en y aan een relatie $\phi(x,y) = 0$ moeten voldoen. Men kan hier bijv. denken aan een kapitaal k dat men op twee verschillende wijzen kan aanwenden. Wendt men een gedeelte x van het kapitaal k op de ene wijze aan en het overblijvende gedeelte y op de andere wijze, dan bedraagt de opbrengst $f(x,y)$.

Men kan vragen naar de maximale opbrengst onder de bijvoorwaarde $x + y = k$. In dit geval is dus de bijvoorwaarde $\phi(x,y) = x + y - k = 0$.

Stelling 12.8 (Multiplicatorenmethode van LAGRANGE)

Veronderstel dat de functies $f(x,y)$ en $\phi(x,y)$ differentieerbaar zijn naar x en y en laten $\phi'_x(x,y)$ en $\phi'_y(x,y)$ continu zijn. Indien $f(x,y)$ onder de voorwaarde $\phi(x,y) = 0$ in (x_0, y_0) een extreme waarde aanneemt en $\phi'_x(x_0, y_0) \neq 0$ óf $\phi'_y(x_0, y_0) \neq 0$, dan bestaat er een getal λ zodat voldaan is aan

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) + \lambda \phi'_x(x_0, y_0) &= 0, \\ (12.18) \quad f'_y(x_0, y_0) + \lambda \phi'_y(x_0, y_0) &= 0, \\ \phi(x_0, y_0) &= 0. \end{aligned}$$

De noodzakelijke voorwaarden (12.18) worden gevonden door de onvoorwaardelijke extrema te bepalen van $F(x,y, \lambda) = f(x,y) + \lambda \phi(x,y)$ als functie van de onafhankelijke variabelen x , y en λ .

Voorbeeld 12.9

Bepaal de uiterste waarden van $f(x,y) = x^3 + 3x^2y$ onder de voorwaarde $x + y = 10$ of $\phi(x,y) = x + y - 10 = 0$.

De op te lossen vergelijkingen luiden dan

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 6xy + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2 + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 10 = 0. \end{cases}$$

Oplossing van deze vergelijkingen geeft $x_0 = 0$, $y_0 = 10$ en $x_1 = 10$, $y_1 = 0$. Men kan aantonen dat de eerste oplossing een minimum, de tweede een maximum is van $f(x,y)$.

Voorbeeld 12.10

Een andere oplossingsmethode willen we toelichten aan de hand van een voorbeeld.

De verzameling punten (x,y) met $\phi(x,y) = 0$ kan vaak worden voorgesteld als een kromme met een zg. parametervoorstelling

$$(12.19) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b .$$

In voorbeeld 12.9 luidt deze parametervoorstelling

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 10 - t \end{cases} \quad \text{voor elke } t .$$

Als $f(x,y)$ op deze kromme gedefinieerd is, dan zullen de extremen van $f(x,y)$ onder de voorwaarde $\phi(x,y) = 0$ voldoen aan

$$(12.20) \quad \frac{df(x(t),y(t))}{dt} = 0 .$$

Nemen we als voorbeeld de functies uit voorbeeld 12.9, dan vinden we

$$F(t) = f(x(t),y(t)) = t^3 + 3t^2(10-t) = -2t^3 + 30t^2 .$$

We stellen nu $F'(t)$ gelijk aan nul

$$F'(t) = -6t^2 + 60t = 0 .$$

Deze vergelijking heeft als oplossingen

$$t_1 = 0 \quad \text{en} \quad t_2 = 10 .$$

Daar $F''(t) = -12t + 60$, geldt

$$F''(0) = 60 > 0 \quad \text{en} \quad F''(10) = -60 < 0 .$$

Voor $t = 0$ is $F(t)$ dus minimaal en voor $t = 10$ maximaal.

De oplossing $t_1 = 0$ levert het punt $(0,10)$, $t_2 = 10$ levert het punt $(10,0)$.

Opgave

Bepaal de extrema van

$$f(x,y) = x + 4y^2,$$

onder de voorwaarde

$$\phi(x,y) = xy - 1 = 0.$$

(Antwoord: $f(x,y)$ is minimaal in $(2, \frac{1}{2})$; $f(2, \frac{1}{2}) = 3$).

13. Convexe functies.

Een functie van één variabele noemt men convex (concaaf) als iedere koorde van de grafiek $y = f(x)$ boven (onder) de grafiek ligt t.o.v. de x-as (het samenvallen van de koorde met de grafiek is ook toegestaan). Als voorbeeld kunnen de bekende parabolen uit de schoolwiskunde dienen.

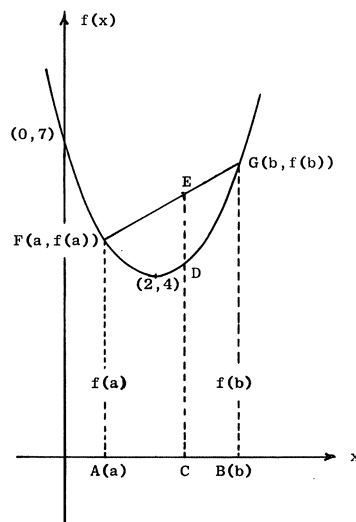


fig. 13.1

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 7$$

$f(x)$ is convex

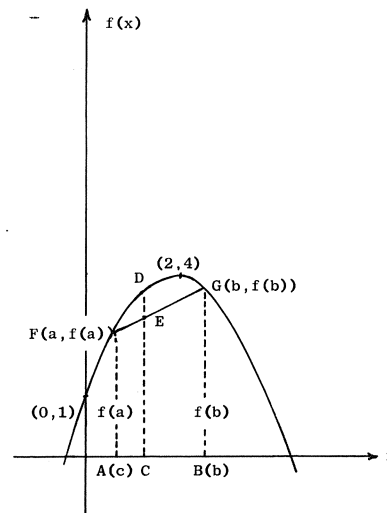


fig. 13.2

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1$$

$f(x)$ is concaaf

Ieder punt E van de koorde FG ($E \neq F$ of G) heeft tot coördinaten $((1-\lambda)a + \lambda b, (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b))$, waarin $0 < \lambda < 1$. Aangezien in figuur 13.1 voor E geldt $EC > DC$, is dus $(1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) > f((1-\lambda)a + \lambda b)$.

Dit is in overeenstemming met de algebraïsche definitie van convexiteit, te weten: een functie $f(x)$ is convex, wanneer voor alle a en b en alle λ , $0 < \lambda < 1$, geldt

$$(13.1) \quad (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) \geq f((1-\lambda)a + \lambda b) .$$

Een functie $f(x)$ is concaaf, wanneer voor alle a en b en alle λ , $0 < \lambda < 1$, geldt

$$(13.2) \quad (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) \leq f((1-\lambda)a + \lambda b) .$$

Voor functies van meer variabelen kan men convexiteit en concaviteit definiëren met behulp van formules analoog aan (13.1) en (13.2). De algemene definitie luidt dan:

Definitie 13.1

Een functie $f(X)$, gedefinieerd voor alle reële waarden van $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ is convex als

$$(13.3) \quad f((1-\lambda)A + \lambda B) \leq (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B) ,$$

concaaf als

$$(13.4) \quad f((1-\lambda)A + \lambda B) \geq (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B) ,$$

geldt voor iedere $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $A \neq B$ en iedere λ , $0 < \lambda < 1$.

Definitie 13.2

De functie $f(X)$ is strikt convex (strikt concaaf) als onder bovenstaande voorwaarden alleen het ongelijkteken geldt.

In figuur 13.3 is nog een convexe functie getekend van twee variabelen, $y = f(x_1, x_2)$. Het punt E van de koorde FG ligt boven het punt D op het oppervlak $y = f(x_1, x_2)$.

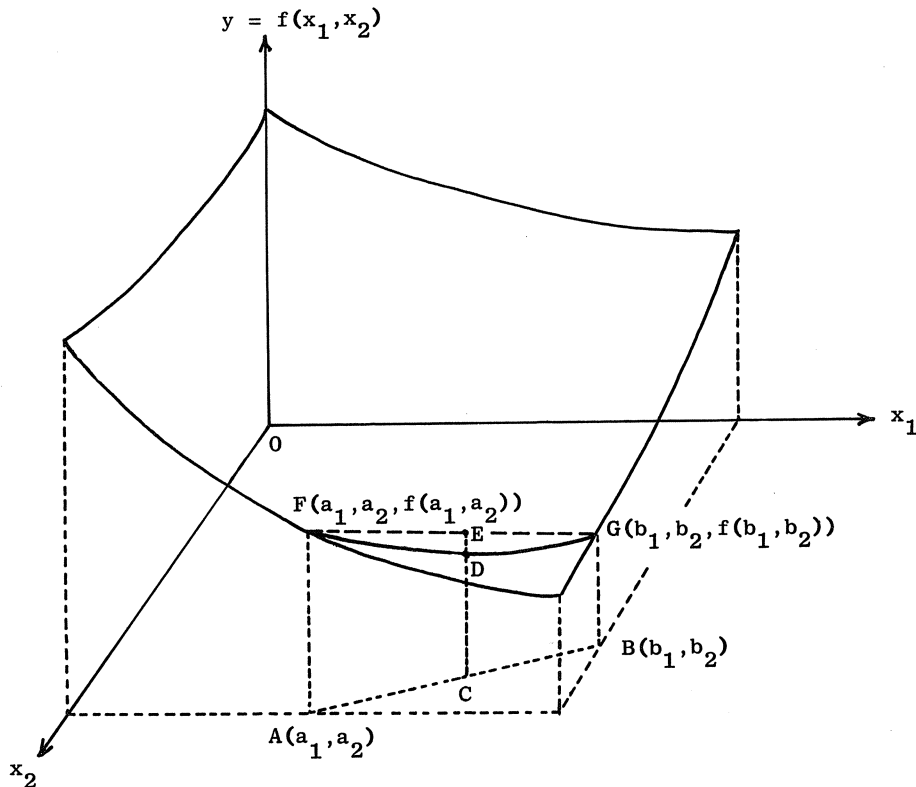


fig. 13.3

Een convexe functie van twee variabelen

Uit voorgaande definitie kunnen de volgende eigenschappen direct door substitutie worden afgeleid:

- a. een lineaire functie is convex en concaaf, maar noch strikt convex, noch strikt concaaf;
- b. de som van een aantal convexe (concave) functies is weer convex (concaaf);

- c. de som van een aantal convexe (concave) functies is strikt convex (strikt concaaf), wanneer tenminste één van de functies strikt convex (strikt concaaf) is;
- d. als $f(X)$ (strikt) convex is, dan is $-f(X)$ (strikt) concaaf en andersom.

Het is van belang te beschikken over criteria waarmee men kan nagaan of een functie al dan niet convex of concaaf is. De formules (13.3) en (13.4) zijn hiervoor in de praktijk niet erg geschikt. Hierna wordt daarom een ander criterium nader besproken, doch ter inleiding dienen eerst enige nieuwe begrippen ingevoerd te worden.

Definitie 13.3

Een symmetrische $n \times n$ - matrix $\mathcal{C}$ is positief definitief als voor iedere $X \neq 0$ geldt:

$$X \mathcal{C} X > 0 ,$$

resp. positief semi-definitief als voor iedere $X \neq 0$ geldt

$$X \mathcal{C} X \geq 0 .$$

Definitie 13.4

Een symmetrische matrix $\mathcal{C}$ is negatief definitief, resp. negatief semi-definitief, wanneer $-\mathcal{C}$ positief definitief, resp. positief semi-definitief is.

Definitie 13.5

Een symmetrische $n \times n$ - matrix $\mathcal{C}$ is indefinitief als er minstens één paar vectoren X en Y bestaat, zodanig dat

$$\begin{aligned} X \mathcal{C} X &> 0 \\ \text{en} \quad Y \mathcal{C} Y &< 0 . \end{aligned}$$

Voorbeeld 13.1

Ga van de matrices

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

na, aan welke van de in de definities 13.3 t/m 13.5 gegeven eigenschappen zij voldoen.

$\mathcal{A}_1$ is positief definitief, want

$$X \mathcal{A}_1 X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$$

en dus is $X \mathcal{A}_1 X > 0$ voor iedere $X = (x_1, x_2, x_3) \neq 0$.

$\mathcal{A}_2$ is positief semi-definitief, want

$$X \mathcal{A}_2 X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2 + x_3)^2$$

en dus is $X \mathcal{A}_2 X \geq 0$; immers een kwadraat is altijd niet negatief, terwijl de waarde nul ook aangenomen kan worden voor $X \neq 0$, bijv. voor $X = (0, 2, -2)$.

$\mathcal{A}_3$ is negatief semi-definitief, want

$$X(-\mathcal{A}_3)X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2)^2$$

en dus is $X(-\mathcal{A}_3)X \geq 0$; $X(-\mathcal{A}_3)X = 0$ voor bijv. $X = (3, -3)$.

$\mathcal{A}_4$ is indefinitief, want

$$X \mathcal{A}_4 X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

en dus is $X \mathcal{A}_4 X < 0$ voor bijv. $X = (0, 0, 4)$, $X \mathcal{A}_4 X > 0$ voor bijv. $X = (2, -3, 0)$ en $X \mathcal{A}_4 X = 0$ voor bijv. $X = (3, 0, -3)$.

De aard van een symmetrische matrix kan dus onderzocht worden door uit te gaan van bovenstaande definities. In de praktijk gaat men vaak anders te werk en maakt men gebruik van een bepaalde eigenschap van positief definitieve matrices. Deze eigenschap wordt in een voetnoot vermeld, daar hiervoor het begrip determinant nodig is, dat in deze cursus niet is behandeld *).

Wij kunnen nu overgaan op de behandeling van de eigenschap, waarmee het convex zijn van een functie kan worden onderzocht. Daartoe onderstellen wij dat de functie $f(x_1, \dots, x_n)$ tweemaal partieel differentieerbaar is naar alle variabelen. De afgeleiden

$$f''_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

kunnen dus alle bepaald worden en vervolgens opgeschreven in de vorm van een matrix als volgt

$$(13.5) \quad \mathcal{C}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f''_{x_1 x_1} & f''_{x_1 x_2} & \dots & f''_{x_1 x_n} \\ f''_{x_2 x_1} & f''_{x_2 x_2} & \dots & f''_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_n x_1} & f''_{x_n x_2} & \dots & f''_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

*) Laat een symmetrische $n \times n$ - matrix gegeven zijn en laat $\mathcal{C}_k$ de matrix voorstellen, welke uit $\mathcal{C}$ ontstaat door alle elementen weg te laten die niet zowel in de eerste k rijen als in de eerste k kolommen voorkomen. Er zijn dus n matrices $\mathcal{C}_k$, $k=1,2,\dots,n$. De determinant van $\mathcal{C}_k$ geven we aan met $|\mathcal{C}_k|$. De stelling luidt dan: een symmetrische matrix $\mathcal{C}$ is dan en slechts dan positief definitief, wanneer alle determinanten $|\mathcal{C}_k|$ positief zijn. Met behulp van deze stelling kan men de aard van symmetrische matrices dus onderzoeken door de betreffende determinanten uit te rekenen. Een uitvoeriger behandeling van deze eigenschap kan men o.a. vinden in F.B. HILDEBRAND, Methods of Applied Mathematics, Prentice-Hall, Inc. (1952), hfdst. I, paragraaf 18.

Wanneer $f(X)$ een functie van de tweede graad is zijn de tweede partiële afgeleiden constanten en dan is $\mathcal{C}$ dus een gewone matrix. In het algemeen zal dit echter niet zo zijn en dan is ieder element van $\mathcal{C}$ zelf weer een functie van $x_1, \dots, x_n$. Wel geldt onder zeer algemene voorwaarden dat $f''_{x_i x_j}$ gelijk is aan $f''_{x_j x_i}$ (vgl. paragraaf 12), waardoor de matrix (13.5) dus wel symmetrisch is. De stelling luidt nu:

Stelling 13.1

Een tweemaal differentieerbare functie $f(x_1, \dots, x_n)$ is dan en slechts dan convex, wanneer de matrix $\mathcal{C}(x_1, \dots, x_n)$ van de tweede partiële afgeleiden voor alle waarden van $x_1, \dots, x_n$ positief semi-definiet is. De functie is strikt convex, wanneer deze matrix positief definiet is voor alle waarden van $x_1, \dots, x_n$.

Voorbeeld 13.2

De functie $e^{2x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3}$ is convex.

De matrix van de tweede partiële afgeleiden is

$$\mathcal{C}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 4 e^{2x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3} & \frac{2}{3} e^{2x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3} & 2 e^{2x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3} \\ \frac{2}{3} e^{2x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3} & \frac{1}{9} e^{2x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3} & \frac{1}{3} e^{2x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3} \\ 2 e^{2x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3} & \frac{1}{3} e^{2x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3} & 1 e^{2x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3} \end{pmatrix}$$

$$= e^{2x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3} \begin{pmatrix} 4 & \frac{2}{3} & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ 2 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Deze matrix is positief semi-definiet voor alle waarden van x_1 , x_2 en x_3 omdat

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} e^{2x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3} \begin{pmatrix} 4 & \frac{2}{3} & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ 2 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{2x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3} \cdot (2y_1 + \frac{1}{3}y_2 + y_3)^2 \geq 0 \quad \text{voor alle waarden van } x_1, x_2, x_3 \text{ en } y_1, y_2, y_3.$$

Voorbeeld 13.3

De functie $x_1^3 + 2x_1^2x_2 - x_2^3 + x_2$ is niet convex.
Immers de matrix van de tweede afgeleiden is

$$\mathcal{C}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6x_1 + 4x_2 & 4x_1 \\ 4x_1 & -6x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & -3x_2 \end{pmatrix}.$$

Bekijken wij nu de vorm

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & -3x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (3x_1 + 2x_2)y_1^2 + 4x_1y_1y_2 - 3x_2y_2^2,$$

dan is eenvoudig in te zien dat er waarden van x_1 en x_2 bestaan, waarbij wij waarden van y_1 en y_2 aan kunnen geven zó dat deze vorm negatief wordt, bijv. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $y_1 = -2$ en $y_2 = 1$ *).

Wij merkten reeds op dat de afgeleiden $f''_{x_i x_j}$ bij een functie van de tweede graad constanten zijn. Nu kan het tweede-graads deel van zo'n functie altijd geschreven worden in de vorm

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} x_j x_k,$$

of afgekort als $\frac{1}{2} X \mathcal{C} X$, waarin $\mathcal{C}$ de symmetrische matrix

$$(13.6) \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

*) Zouden wij de stelling uit de voetnoot op blz. 114 toepassen, dan zou $\mathcal{C}(x_1, x_2)$ voor iedere greep (x_1, x_2) positief definitief zijn, wanneer

$$3x_1 + 2x_2 \quad \text{en} \quad \begin{vmatrix} 3x_1 + 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & -3x_2 \end{vmatrix} = -4x_1^2 - 9x_1x_2 - 6x_2^2 \quad \text{voor alle waarden van } x_1 \text{ en } x_2 \text{ positief waren. Men ziet direkt in dat dit niet het geval is.}$$

voorstelt. De matrix (13.6) is dan ook de matrix van de tweede partiële afgeleiden. Voor dit bijzondere geval krijgt stelling 13.1 de volgende eenvoudige vorm.

Stelling 13.2

De functie $f(X) = \frac{1}{2} X C X$, waarin C een symmetrische $n \times n$ - matrix is, is dan en slechts dan convex, wanneer C positief semi-definiet is. De functie is strikt convex, wanneer C positief definiet is.

Het bewijs van stelling 13.1 zullen wij niet geven. Stelling 13.2 kan natuurlijk uit stelling 13.1 afgeleid worden, maar ook rechtstreeks als volgt:

Bewijs van stelling 13.2:

Stel $A \neq B$ en $0 < \lambda < 1$, dan geldt:

$$\begin{aligned} 2f((1-\lambda)A + \lambda B) &= ((1-\lambda)A + \lambda B)C((1-\lambda)A + \lambda B) = (1-\lambda)^2 A C A + \lambda(1-\lambda)A C B + \lambda(1-\lambda)B C A + \lambda^2 B C B \\ (2-2\lambda)f(A) + 2\lambda f(B) &= (1-\lambda)A C A + \lambda B C B \\ \hline \{f((1-\lambda)A + \lambda B) - (1-\lambda)f(A) - \lambda f(B)\} &= -\lambda(1-\lambda)A C A + \lambda(1-\lambda)A C B + \lambda(1-\lambda)B C A - \lambda(1-\lambda)B C B = \\ &= -\lambda(1-\lambda)A C (A-B) + \lambda(1-\lambda)B C (A-B) = \\ &= -\lambda(1-\lambda) \cdot (A-B) C (A-B). \end{aligned}$$

Wegens $0 < \lambda < 1$ is $\lambda(1-\lambda) > 0$. Wanneer nu gegeven is dat C positief definiet is, dan is dus voor iedere A en B

$$f((1-\lambda)A + \lambda B) - (1-\lambda)f(A) - \lambda f(B) = -\lambda(1-\lambda) \cdot (A-B) C (A-B) < 0$$

en dus is $f(X)$ strikt convex. Is omgekeerd $f(X)$ strikt convex, dan is voor iedere A en B ,

$$f((1-\lambda)A + \lambda B) < (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B)$$

en dus is voor iedere $Y \neq 0$ $Y C Y > 0$, daar iedere vector Y geschreven kan worden als het verschil van twee vectoren A en B . Voor het geval C positief semi-definiet is en $f(X)$ convex, volgt de stelling uit bovenstaande redenering, wanneer men onder de ongelijktekens een "=" teken plaatst.

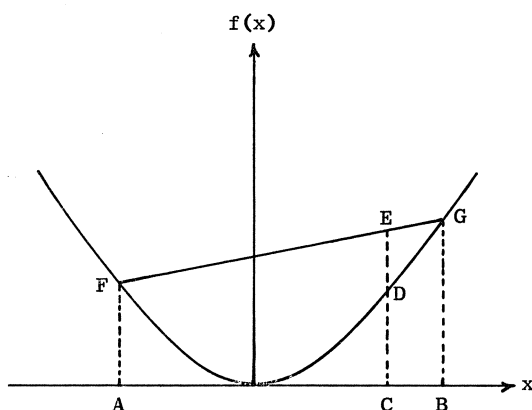
Opmerking

Hoewel in stelling 13.2 $f(X)$ geen lineaire termen bezit, geldt de stelling toch voor alle kwadratische functies. Immers volgens eigenschap a, genoemd na definitie 13.2 is een lineaire functie convex, terwijl volgens eigenschap b de som van twee convexe functies weer convex is. Tenslotte leert eigenschap c ons, dat de kwadratische functie strikt convex is wanneer het tweede-graads deel strikt convex is.

Wij besluiten het onderzoek naar het al dan niet convex zijn van een functie met een voorbeeld, dat ook grafisch eenvoudig te verifiëren is.

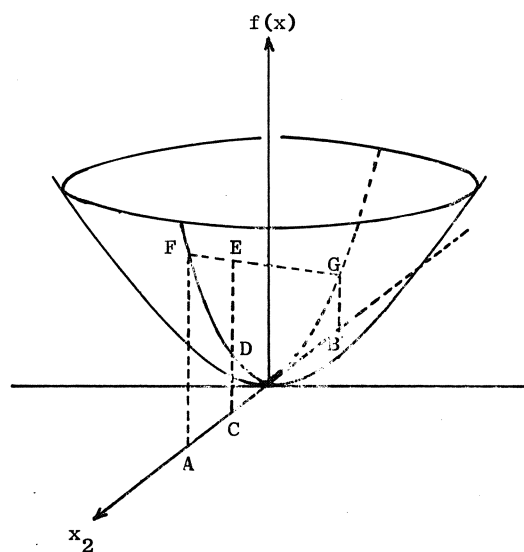
Voorbeeld 13.4

1. Neem $\mathcal{C} = \left(\frac{1}{4}\right)$. $f(X) = x \cdot \frac{1}{4} \cdot x = \frac{1}{4}x^2$. $\mathcal{C}$ is positief definit, terwijl uit figuur 13.4 blijkt dat $f(X)$ convex is.

fig. 13.4

$$f(X) = \frac{1}{4}x^2$$

$f(X)$ is strikt convex

fig. 13.5

$$f(X) = \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2$$

$f(X)$ is strikt convex

2. Hetzelfde geldt voor

$$c = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad f(X) = \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 \quad (\text{zie figuur 13.5}) .$$

De letters A, B, C, D, E, F en G hebben dezelfde betekenis als in figuur 13.1 t/m 13.3.

Neemt men in het eerste voorbeeld i.p.v. $f(X) = \frac{1}{4}x^2$, $g(X) = -\frac{1}{4}x^2$, dan ziet men gemakkelijk in, dat $g(X)$ concaaf en de bijbehorende "matrix" $(-\frac{1}{4})$ negatief definitief is.

Literatuur

L. KUIPERS, Leerboek der analyse (2 delen), Noordhoff, Groningen, 1960.

L. KUIPERS en R. TIMMAN (onder redactie van), Handboek der wiskunde, Scheltema & Holkema, Amsterdam, 1963.

G.M. FICHTENHOLZ, Differential- und Integralrechnung (3 delen), VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1964 (uitvoerig leerboek met talrijke uitgewerkte voorbeelden en vraagstukken).

T.M. APOSTOL, Mathematical Analysis, Addison-Wesley, Reading, 1957 (voortreffelijk modern, maar abstract leerboek).

A.C. AITKEN, Determinants and Matrices, Oliver and Boyd, Edinburgh etc., 1958.

UITGAVEN IN DE SERIE MC SYLLABUS

Onderstaande uitgaven zijn verkrijgbaar bij het Mathematisch Centrum,
2e Boerhaavestraat 49 te Amsterdam-1005, tel. 020-947272.

-
- | | |
|----------|---|
| MCS 1.1 | F. GÖBEL & J. VAN DE LUNE, <i>Leergang Besliskunde, deel 1: Wiskundige basiskennis</i> , 1965. ISBN 90 6196 014 2. |
| MCS 1.2 | J. HEMELRIJK & J. KRIENS, <i>Leergang Besliskunde, deel 2: Kansberekening</i> , 1965. ISBN 90 6196 015 0. |
| MCS 1.3 | J. HEMELRIJK & J. KRIENS, <i>Leergang Besliskunde, deel 3: Statistiek</i> , 1966. ISBN 90 6196 016 9. |
| MCS 1.4 | G. DE LEVE & W. MOLENAAR, <i>Leergang Besliskunde, deel 4: Markovketens, en wachttijden</i> , 1966. ISBN 90 6196 017 7. |
| MCS 1.5 | J. KRIENS & G. DE LEVE, <i>Leergang Besliskunde, deel 5: Inleiding tot de mathematische besliskunde</i> , 1966. ISBN 90 6196 018 5. |
| MCS 1.6a | B. DORHOUT & J. KRIENS, <i>Leergang Besliskunde, deel 6a: Wiskundige programmering 1</i> , 1968. ISBN 90 6196 032 0. |
| MCS 1.7a | G. DE LEVE, <i>Leergang Besliskunde, deel 7a: Dynamische programmering 1</i> , 1968. ISBN 90 6196 033 9. |
| MCS 1.7b | G. DE LEVE & H.C. TIJMS, <i>Leergang Besliskunde, deel 7b: Dynamische programmering 2</i> , 1970. ISBN 90 6196 055 x. |
| MCS 1.7c | G. DE LEVE & H.C. TIJMS, <i>Leergang Besliskunde, deel 7c: Dynamische programmering 3</i> , 1971. ISBN 90 6196 066 5. |
| MCS 1.8 | J. KRIENS, F. GÖBEL & W. MOLENAAR, <i>Leergang Besliskunde, deel 8: Minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie</i> , 1968. ISBN 90 6196 034 7. |
| MCS 2.1 | G.J.R. FÖRCH, P.J. VAN DER HOUWEN & R.P. VAN DE RIET, <i>Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 1</i> , 1967. ISBN 90 6196 023 1. |
| MCS 2.2 | L. DEKKER, T.J. DEKKER, P.J. VAN DER HOUWEN & M.N. SPIJKER, <i>Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 2</i> , 1968. ISBN 90 6196 035 5. |
| MCS 3.1 | H.A. LAUWERIER, <i>Randwaardeproblemen, deel 1</i> , 1967. ISBN 90 6196 024 x. |
| MCS 3.2 | H.A. LAUWERIER, <i>Randwaardeproblemen, deel 2</i> , 1968. ISBN 90 6196 036 3. |
| MCS 3.3 | H.A. LAUWERIER, <i>Randwaardeproblemen, deel 3</i> , 1968. ISBN 90 6196 043 6. |
| MCS 4 | H.A. LAUWERIER, <i>Representaties van groepen</i> , 1968. ISBN 90 6196 037 1. |
| MCS 5 | J.H. VAN LINT, J.J. SEIDEL & P.C. BAAYEN, <i>Colloquium discrete wiskunde</i> , 1968. ISBN 90 6196 044 4. |
| MCS 6 | K.K. KOKSMA, <i>Cursus ALGOL 60</i> , 1969. ISBN 90 6196 045 2. |

- MCS 7.1 *Colloquium Moderne rekenmachines, deel 1*, 1969. ISBN 90 6196 046 0.
- MCS 7.2 *Colloquium Moderne rekenmachines, deel 2*, 1969. ISBN 90 6196 047 9.
- MCS 8 H. BAVINCK & J. GRASMAN, *Relaxatietrillingen*, 1969. ISBN 90 6196 056 8.
- MCS 9.1 T.M.T. COOLEN, G.J.R. FÖRCH, E.M. DE JAGER & H.G.J. PIJLS, *Elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1*, 1970. ISBN 90 6196 048 7.
- MCS 9.2 W.P. VAN DEN BRINK, T.M.T. COOLEN, B. DIJKHUIS, P.P.N. DE GROEN, P.J. VAN DER HOUWEN, E.M. DE JAGER, N.M. TEMME & R.J. DE VOGELAERE, *Colloquium Elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2*, 1970. ISBN 90 6196 049 5.
- MCS 10 J. FABIUS & W.R. VAN ZWET, *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*, 1970. ISBN 90 6196 057 6.
- MCS 11 H. BART, M.A. KAASHOEK, H.G.J. PIJLS, W.J. DE SCHIPPER & J. DE VRIES, *Colloquium Halfalgebra's en positieve operatoren*, 1971. ISBN 90 6196 067 3.
- MCS 12 T.J. DEKKER, *Numerieke algebra*, 1971. ISBN 90 6196 068 1.
- MCS 13 F.E.J. KRUSEMAN ARETZ, *Programmeren voor rekenautomaten; De MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8*, 1971. ISBN 90 6196 069 X.
- MCS 14 H. BAVINCK, W. GAUTSCHI & G.M. WILLEMS, *Colloquium Approximatietheorie*, 1971. ISBN 90 6196 070 3.
- MCS 15.1 T.J. DEKKER, P.W. HEMKER & P.J. VAN DER HOUWEN, *Colloquium Stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1*, 1972. ISBN 90 6196 078 9.
- MCS 15.2 P.A. BEENTJES, K. DEKKER, H.C. HEMKER, S.P.N. VAN KAMPEN & G.M. WILLEMS, *Colloquium Stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2*, 1973. ISBN 90 6196 079 7.
- MCS 15.3 P.A. BEENTJES, K. DEKKER, P.W. HEMKER & M. VAN VELDHIJZEN, *Colloquium Stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3*, 1975. ISBN 90 6196 118 1.
- MCS 16.1 L. GEURTS, *Cursus Programmeren, deel 1: De elementen van het programmeren*, 1973. ISBN 90 6196 080 0.
- MCS 16.2 L. GEURTS, *Cursus Programmeren, deel 2: De programmeertaal ALGOL 60*, 1973. ISBN 90 6196 087 8.
- MCS 17.1 P.S. STOBBE, *Lineaire algebra, deel 1*, 1974. ISBN 90 6196 090 8.
- MCS 17.2 P.S. STOBBE, *Lineaire algebra, deel 2*, 1974. ISBN 90 6196 091 6.
- MCS 17.3 N.M. TEMME, *Lineaire algebra, deel 3*, 1976. ISBN 90 6196 123 8.
- MCS 18 F. VAN DER BLIJ, H. FREUDENTHAL, J.J. DE IONGH, J.J. SEIDEL & A. VAN WIJNGAARDEN, *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, Syllabus van de Vakantiecursus 1971*, 1974. ISBN 90 6196 092 4.
- MCS 19 A. HORDIJK, R. POTHARST & J.TH. RUNNENBURG, *Optimaal stoppen van Markovketens*, 1974. ISBN 90 6196 093 2.
- MCS 20 T.M.T. COOLEN, P.W. HEMKER, P.J. VAN DER HOUWEN & E. SLAGT, *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen*, 1976. ISBN 90 6196 094 0.

- MCS 21 J.W. DE BAKKER (red.), *Colloquium Programmacorrectheid*, 1975.
ISBN 90 6196 103 3.
- * MCS 22 R. HELMERS, F.H. RUYMGAART, M.C.A. VAN ZUYLEN & J. OOSTERHOOF,
*Asymptotische methoden in de toetsingstheorie toepassingen van
naburigheid*, 1976. ISBN 90 6196 104 1.
- MCS 23.1 J.W. DE ROEVER (red.), *Colloquium Onderwerpen uit de biomathe-
matica, deel 1*, 1976. ISBN 90 6196 105 X.
- * MCS 23.2 J.W. DE ROEVER (red.), *Colloquium Onderwerpen uit de biomathe-
matica, deel 2*, 1976. ISBN 90 6196 115 7.
- * MCS 24.1 P.J. VAN DER HOUWEN, *Numerieke integratie van differentiaalver-
gelijkingen, deel 1: Eenstapsmethoden*, 1974. ISBN 90 6196 106 8.
- MCS 25 *Colloquium Structuur van Programmeertalen*, 1976.
ISBN 90 6196 116 5.
- MCS 26.1 N.M. TEMME (red.), *Nonlinear Analysis, volume 1*, 1976.
ISBN 90 6196 117 3.
- MCS 26.2 N.M. TEMME (red.), *Nonlinear Analysis, volume 2*, 1976.
ISBN 90 6196 121 1.
- MCS 27 M. BAKKER, P.W. HEMKER, P.J. VAN DER HOUWEN, S.J. POLAK &
M. VAN VELDHUIZEN, *Colloquium Discreteringmethoden*, 1976.
ISBN 90 6196 124 6.
- * MCS 28 O. DIEKMAN, N.M. TEMME (EDS.), *Nonlinear Diffusion Problems*, 1976.
ISBN 90 6196 126 2.
- MCS 29.1 J.C.P. BUS (red.), *Numerieke Programmatuur, deel 1*, 1976.
ISBN 90 6196 128 9.
- MCS 29.2 J.C.P. BUS (red.), *Numerieke Programmatuur, deel 2*,
ISBN 90 6196 1440.
- MCS 31 J.H. VAN LINT (red.), *Inleiding in de Coderingstheorie*, 1976.
ISBN 90 6196 136 X.
- MCS 32 L. GEURTS (red.), *Colloquium Bedrijfssystemen*, 1976.
ISBN 90 6196 137 8.
- * MCS 33 P.J. VAN DER HOUWEN, *Differentieschema's voor de berekening van
waterstanden in zeeën en rivieren*, ISBN 90 6196 138 6.
- * MCS 34 J. HEMELRIJK, *Orienterende cursus mathematische statistiek*,
ISBN 90 6196 139 4.

De met een * gemerkte uitgaven moeten nog verschijnen.

